20. cvičení - L'Hospital + Heine

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Spočtěte limity. Nezapomeňte na Heineho a na fakt, že ne vždy L'Hospital pomůže.

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{60}+3x-4}{x^{40}-2x+1}$

Řešení:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^{60}+3x-4}{x^{40}-2x+1} \underset{0/0}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 1} \frac{60x^{59}+3}{40x^{39}-2} = \frac{63}{38}.$$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{\pi}{2}-\arccos x}{x}$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\pi}{2}-\arccos x}{x} \underset{0/0}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1} = 1$$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - x}{x-\sin x}$

Řešení: (Příklad máme z https://users.math.cas.cz/~vanzura/SBIR8.PDF)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x-\sin x} \underset{0/0}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1+\cos x}{\cos^2 x} = \frac{1+1}{1^2} = 2.$$

(d) $\lim\limits_{n\to \infty} \dfrac{\tan\frac{1}{n}-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}}$

Řešení:

Budeme prve počítat limitu funkce, pomocí L'Hospitalova pravidla typu "0/0".

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x-\sin x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x(1-\cos x)} =$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\cos x}{\cos^2 x} = \frac{1+1}{1^2} = 2.$$

Nyní použijeme Heineho, $x_n = \frac{1}{n}$, x_n je v definičním oboru funkce $\frac{\tan x - x}{x-\sin x}$, $x_n \neq 0$, $\lim \frac{1}{n} = 0$.

Odtud

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tan\frac{1}{n}-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}} = 2.$$

(e) $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$

Řešení: Prve přepíšeme

$$\lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x\to 0+} e^{x\ln x}$$

Limitu vnitřní funkce nyní spočteme pomocí L'Hospitala

$$\lim_{x\to 0+} x\ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \underset{\text{něco}/\infty}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} -x = 0.$$

Složením s vnější funkcí dostáváme

$$\lim_{x\to 0+} x^x = e^0 = 1$$

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 2x - 2\arcsin x}{x^3}$

Řešení: (Příklad máme z https://users.math.cas.cz/~vanzura/SBIR8.PDF)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin 2x - 2\arcsin x}{x^3} \overset{L'H}{\underset{0/0}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2}{3\sqrt{1-4x^2}\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-4x^2}}{x^2} \overset{VOAL}{=} \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1,$$

kde druhou limitu jsme spočetli rozšířením

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-4x^2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - x^2 - 1 + 4x^2}{x^2(\sqrt{1-4x^2} + \sqrt{1-x^2})}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{x^2(\sqrt{1-4x^2} + \sqrt{1-x^2})} = \frac{3}{2}.$$

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x\sin x} - \dfrac{1}{x^2}$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x\sin x} - \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^2 \sin x} \overset{L'H}{\underset{0/0}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{2x\sin x + x^2\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{x}{2\sin x + x\cos x} \overset{VOAL}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Druhá limita se opět vyřeší L'Hospitalovým pravidlem:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{2\sin x + x\cos x} \overset{L'H}{\underset{0/0}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{1}{2\cos x + \cos x + x(-\sin x)} = \frac{1}{2+1+0} = \frac{1}{3}.$$

(h) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \dfrac{\ln^2(n+1)}{(n-1)^2}$

Řešení:

Budeme uvažovat limitu funkce:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln^2(x+1)}{(x-1)^2} \overset{L'H}{\underset{\text{něco}/\infty}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2\ln(x+1)}{x+1}}{2(x-1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1)}{(x+1)(x-1)} \overset{L'H}{\underset{\text{něco}/\infty}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{2x} = 0.$$

Z Heineho, $x_n = x$, $x_n \to \infty$, $x_n \neq \infty\, \forall n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln^2(n+1)}{(n-1)^2} = 0.$$

Nyní ze dvou policajtů nebo z věty o omezené a mizející máme i, že

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{\ln^2(n+1)}{(n-1)^2} = 0.$$

(i) $\lim_{x\to 0} \frac{x \operatorname{cotg} x - 1}{x^2}$

Řešení: (Příklad máme z `https://users.math.cas.cz/~vanzura/SBIR8.PDF`)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \operatorname{cotg} x - 1}{x^2} \underset{0/0}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{cotg} x - \frac{x}{\sin^2}}{2x} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x \cos x - x}{2x \sin^2 x}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin^2 x} \cdot \frac{\sin x \cos x - x}{2x^3} \overset{VOAL}{=} 1 \cdot 1 \cdot \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}.$$

Pro druhou limitu máme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x \cos x - x}{2x^3} \underset{0/0}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x \cos - \sin x \sin x - 1}{6x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x) - 1}{6x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0} -\frac{1 - \cos(2x)}{\frac{3}{2}(2x)^2} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}.$$

(j) $\lim_{x\to \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Řešení:

L'Hospitalem upočítat nejde. Vytkneme

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{|x|} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1.$$

(VOLSF na $\sqrt{y}$ a $1 + \frac{1}{x^2}$, podmínka (S).)

(k) $\lim_{x\to 1-} \ln x \cdot \ln(1-x)$

Řešení:

$$\lim_{x\to 1-} \ln x \cdot \ln(1-x) = \lim_{x\to 1-} \frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{\ln x}} \underset{\text{něco}/\infty}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 1-} \frac{\frac{1}{1-x}}{\frac{-1}{x \ln^2 x}} = \lim_{x\to 1-} -x \ln x \frac{\ln x}{1-x}$$
$$\overset{VOAL}{=} -1 \cdot 0 \cdot (-1) = 0$$

(l) $\lim_{n\to\infty} \cos(n\pi) \frac{n^k}{e^{an}}$, $k \in \mathbb{N}$, $a > 0$.

Řešení:

Neboť $\cos(n\pi) = (-1)^n$, musíme limitu nejprve roztrhnout. Budeme počítat jen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{e^{an}}.$$

Převedeme na funkci. Pak použijeme l'Hospitala typu "něco/∞". Použijeme jej k-krát. Opakovaně nutno ověřit podmínky l'Hospitala (vychází pořád stejně).

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^k}{e^{ax}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{kx^{k-1}}{ae^{ax}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{k(k-1)x^{k-2}}{a^2 e^{ax}} = \cdots \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{k(k-1)\cdots 2x}{a^{k-1}e^{ax}} \overset{L'H}{=}$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{k!}{a^k e^{ax}} = \frac{k!}{a^k} \cdot 0 = 0.$$

Z Heineho pak i limita

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{e^{an}} = 0.$$

Po přidání kosinu získáme ze dvou policajtů výsledek

$$\lim_{n\to\infty} \cos(n\pi)\frac{n^k}{e^{an}} = 0.$$

(m) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\ln(1+x)} \cdot \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \overset{VOAL}{=} 1 \cdot -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Druhou limitu spočteme L'Hospitalem

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \underset{0/0}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - 1 - x}{2x(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{2(1+x)} = -\frac{1}{2}$$

(n) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x\sqrt{x}} \left(\sqrt{a} \arctan\sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{b} \arctan\sqrt{\frac{x}{b}} \right)$, $a, b > 0$

Řešení: (Příklad máme z https://users.math.cas.cz/~vanzura/SBIR8.PDF)

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\left(\sqrt{a} \arctan\sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{b} \arctan\sqrt{\frac{x}{b}} \right)}{x\sqrt{x}} \underset{0/0}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\sqrt{a}}{1+\frac{x}{a}} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{x}} \frac{1}{a} - \frac{\sqrt{b}}{1+\frac{x}{b}} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b}{x}} \frac{1}{b}}{\frac{3}{2}\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{1+\frac{x}{a}} - \frac{1}{1+\frac{x}{b}}}{3x} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}{(1+\frac{x}{a})(1+\frac{x}{b})3x} \overset{VOAL}{=} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right)$$

2. Rozhodněte, zda je funkce $f(x) = \frac{x\cos 2x \sin 3x}{x^2-\pi^2}$, $f(\pi) = -\frac{1}{2}$, spojitá v π.

   Řešení: Je potřeba vyšetřit, zda se limita v π rovná funkční hodnotě. Tedy

$$\lim_{x\to\pi} \frac{x\cos 2x \sin 3x}{x^2 - \pi^2} = \lim_{x\to\pi} \frac{x\cos 2x}{x+\pi} \cdot \frac{\sin 3x}{x-\pi} \overset{VOAL}{=} \frac{\pi}{2\pi} \cdot -3 = -\frac{3}{2}$$

   Druhou limitu jsme spočetli

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin 3x}{x-\pi} \underset{0/0}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to\pi} \frac{3\cos 3x}{1} = -3.$$

   Závěr: funkce f není spojitá v π.

Bonus

3. Spočtěte limity

(a)

$$\lim_{x\to 0+} (\operatorname{cotg} x)^{\sin x}$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0+} (\operatorname{cotg} x)^{\sin x} = \lim_{x\to 0+} e^{\sin x \ln(\cot x)}$$

Pro vnitřní funkci:

$$\lim_{x\to 0+} \sin x \ln(\cot x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln(\cot x)}{\frac{1}{\sin x}} \overset{L'H}{\underset{\text{něco}/\infty}{=}} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{\cot x}\cdot\frac{-1}{\sin^2 x}}{\frac{-1}{\sin^2 x}\cdot \cos x}$$
$$= \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{\cos^2 x} = 0$$

Dohromady s VOLSF

$$\lim_{x\to 0+} e^{\sin x \ln(\cot x)} = e^0 = 1$$

(b)

$$\lim_{x\to\infty} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$$

Řešení: (Příklad máme z https://users.math.cas.cz/~vanzura/SBIR8.PDF)

$$\lim_{x\to\infty} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right)}$$

Pro vnitřní funkci máme

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right)}{x} \overset{L'H}{\underset{\text{něco}/\infty}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{\pi x}{2x+1}}\cdot\frac{\pi(2x+1)-2\pi x}{(2x+1)^2}}{1}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\pi}{\sin\frac{\pi x}{2x+1}}\cdot\frac{1}{\cos\frac{\pi x}{2x+1}}\cdot\frac{1}{(2x+1)^2}$$

Z VOLSF

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi}{\sin\frac{\pi x}{2x+1}} = \pi.$$

Druhou limitu upočteme L'Hospitalem

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{(2x+1)^2}}{\cos\frac{\pi x}{2x+1}} \overset{L'H}{\underset{0/0}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-2}{(2x+1)^3}\cdot 2}{-\sin\frac{\pi x}{2x+1}\cdot\frac{\pi}{(2x+1)^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{-\pi\sin\frac{\pi x}{2x+1}}\cdot\frac{-4}{(2x+1)} \overset{VOAL}{=} \frac{1}{-\pi\cdot 1}\cdot 0 = 0.$$

Závěr:

$$\lim_{x\to 0+} (\operatorname{cotg} x)^{\sin x} = e^0 = 1$$

(c)

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{cotg} x - \frac{1}{x}$$

Řešení: (Příklad máme z https://users.math.cas.cz/~vanzura/SBIR8.PDF)

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{cotg} x - \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = 1\cdot 0$$

Druhou limitu vyřešíme L'Hospitalem

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} \overset{L'H}{\underset{0/0}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2} = 0.$$

(d)

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right)^{\frac{1}{x}}$$

Řešení: (Příklad máme z https://users.math.cas.cz/~vanzura/SBIR8.PDF)
Prve přepíšeme

$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)}$$

Pro vnitřní funkci máme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right) - \ln e}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}\ln(1+x) - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$$

$$\overset{L'H}{\underset{0/0}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{2x(x+1)} = -\frac{1}{2}$$

Celé dohromady

$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)} = e^{-\frac{1}{2}}$$

(e)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c^n}{n},$$

$c > 1$.
Řešení: Převedeme na funkci:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{c^x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x\ln c}}{x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{c^x \ln c}{1} = \infty$$

Z Heineho plyne, že i původní limita

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c^n}{n} = \infty.$$

(f)

$$\lim_{n\to\infty} (\ln n)^{\frac{1}{n}}$$

Řešení:

Budeme počítat limitu funkce:

$$\lim_{x\to 0+} e^{(x \ln(\ln \frac{1}{x}))}$$

Tedy musíme spočíst

$$\lim_{x\to 0+} x \ln(\ln \frac{1}{x}) = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln(\ln \frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{\ln \frac{1}{x}} \frac{1}{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{\ln \frac{1}{x}} x \stackrel{VOAL}{=} 0 \cdot 0$$

Nyní použijeme Heineho, verze zprava: $x_n = \frac{1}{n}$, $x_n \geq 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, definiční obor je také ok. Tedy

$$\lim_{n\to\infty} (\ln n)^{\frac{1}{n}} = e^0 = 1.$$

Zkouškové příklady

4. Spočtěte limity

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} n^8\left(2\cos\dfrac{1}{n^2} - 2 + \dfrac{1}{n^4}\right)$

   (b) $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\sqrt{e^x - \sin x} - \sqrt{1 + \frac{x^2}{2}}}{\arcsin x - \sin x}$

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\cos\frac{3}{n}}{\cos\frac{5}{n}}\right)^{n^2}$

   (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos\arctan\sqrt{n}}{\sin\operatorname{arccot}\sqrt{n}}$

   (e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)\right)^{\sqrt{n^2+1}}$

5. Sestrojte funkce f, g rostoucí a spojité na $\mathbb{R}$ takové, že $x^2 = f(x) - g(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

   Řešení: Např. $-e^{-x}$ a $x^2 - e^{-x}$.

   Zkusíme to přes derivace. Jestliže $x^2 = f(x) - g(x)$, pak rovnost platí i po zderivování, tedy $2x = f'(x) - g'(x)$.

   Tedy $f'(x) = 2x + g'(x)$. Navíc potřebujeme, aby $f'(x) \geq 0$ a $2x + g'(x) \geq 0$, neboli. $g'(x) \geq -2x$.

   Nyní využijeme znalosti $e^x \geq x + 1$.

   Pak $g(x) = -e^{-x}$ i $f(x) = x^2 - e^{-x}$ jsou rostoucí a spojité a $f - g = x^2$.

4a

$$\lim_{n\to\infty} n^8 \left(2\cos\frac{1}{n^2} - 2 + \frac{1}{n^4}\right)$$

Heine $\quad x_n = \frac{1}{n^2} \to 0 \qquad \frac{1}{n^2} \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4}\left(2\cos x - 2 + x^2\right) \underset{\frac{0}{0}}{\overset{L'H}{=}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin x + 2x}{4x^3} \underset{\frac{0}{0}}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{-2\cos x + 2}{12x^2}$$

(známá lim)

$$= \lim \frac{2}{12} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \overset{VOAL}{=} \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{12}}}$$

45

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{e^x - \sin x} - \sqrt{1+\frac{1}{2}x^2}}{\arcsin x - \sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sin x - (1+\frac{1}{2}x^2)}{\arcsin x - \sin x} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{e^x - \sin x} + \sqrt{1+\frac{1}{2}x^2}}}_{}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-0} + \sqrt{1+0}} \to \frac{1}{e}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sin x - 1 - \frac{1}{2}x^2}{\arcsin x - \sin x} \overset{L'H}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x - x}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \cos x}$$

$$\overset{L'H}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{e^x + \sin x - 1}{-\frac{1}{2}(1-x^2)^{-3/2}\cdot(-2x) + \sin x} \overset{L'H}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{e^x + \cos x}{\frac{2x^2+1}{(1-x^2)^{5/2}} + \cos x}$$

$$\overset{VOAL}{=} \frac{1+1}{\frac{2\cdot 0+1}{(1-0)^{5/2}} + 1} = \underline{\underline{1}}$$

VOLSF: $\lim_{x\to 0} (1-x^2)^{5/2} = 1$

$f(y) = y^{5/2}$ $\qquad \lim_{y\to 1} y^{5/2} = 1$ $\qquad$ (S) $y^{5/2}$ spoj' v 1

$g(x) = 1-x^2$ $\qquad \lim_{x\to 0} 1-x^2 = 1$

VOLSF $\qquad f(y) = \sqrt{y}$

$g_1(x) = e^x - \sin x$ $\qquad \lim_{x\to 0} e^x - \sin x \overset{VOAL}{=} 1-0$ $\qquad \lim_{y\to 1} \sqrt{y} = 1$

$g_2(x) = 1+\frac{1}{2}x^2$ $\qquad \lim_{x\to 0} 1+\frac{x^2}{2} \overset{VOAL}{=} 1+0$ $\qquad$ (S) $\sqrt{y}$ spoj' v 1

4C

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\cos \frac{3}{n}}{\cos \frac{5}{n}} \right)^{n^2} = e^8$$

Heine $x_n = 1/n \to 0$ $\quad \frac{1}{n} \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\cos 3x}{\cos 5x} \right)^{1/x^2} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2} \cdot \ln\left(\frac{\cos 3x}{\cos 5x}\right)} = e^8$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(\frac{\cos 3x}{\cos 5x}\right)}{x^2} \overset{L'H}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\cos 5x}{\cos 3x} \cdot \frac{-3\sin 3x \cos 5x + 5 \sin 5x \cos 3x}{\cos^2 5x}}{2x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \underset{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \underset{\frac{1}{1\cdot 1}}{\frac{1}{\cos 3x \cdot \cos 5x}} \cdot \left(\underbrace{\frac{-3\sin 3x \cos 5x}{3x} \cdot 3}_{-3\cdot 1\cdot 1\cdot 3} + \underbrace{5\,\frac{5\sin 5x \cos 3x}{5x}}_{5\cdot 5\cdot 1\cdot 1} \right)$$

$$\overset{\text{VOAL}}{=} \frac{1}{2}\cdot 1 \left(-9 + 25 \right) = \underline{\underline{8}}$$

VOLSF $\quad f(y) = e^y \quad g(x) = \frac{1}{x^2} \ln\left(\frac{\cos 3x}{\cos 5x}\right) \quad \lim_{x\to 0} g(x) = 8 \quad \lim_{y\to 8} e^y = e^8 \quad$ (s) e^y spojitá

$f(y) = \cos y \qquad \lim_{y\to 0} \cos y = 1 \qquad$ (s) $\cos y$ spoj. v 0

$g_1(x) = 5x \qquad \lim_{x\to 0} g_{1,2}(x) = 0$

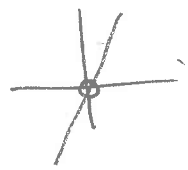
$g_2(x) = 3x$

VOLSF $\quad f(y) = \frac{\sin y}{y} \qquad \lim_{y\to 0} f(y) = 1 \qquad$ (P) $\quad 3x \neq 0 \quad$ na $P(0,1)$

$5x \neq 0 \quad$ - 11 -

$g_1(x) = 5x \qquad \lim_{x\to 0} g(x) = 0$

$g_2(x) = 3x$



4d

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos \arctan \sqrt{n}}{\sin \operatorname{arccot} \sqrt{n}} = 1$$

Heine $x_n = \sqrt{n}$ $x_n \to \infty$ $x_n \neq n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\cos(\arctan x)}{\sin(\operatorname{arccot} x)} = \lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{\operatorname{arccot} x}{\sin \operatorname{arccot} x}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{\cos(\arctan x)}{\operatorname{arccot} x}}_{1}$$

$$\overset{\text{VOAL}}{=} \underline{\underline{1}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\cos(\arctan x)}{\operatorname{arccot} x} \underset{\frac{0}{0}}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{-}\sin(\arctan x) \cdot \frac{1}{\cancel{1+x^2}}}{\cancel{-\frac{1}{1+x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \sin(\arctan x) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

VOLSF $\quad f(y) = \frac{y}{\sin y} \quad \lim_{y\to 0} \frac{y}{\sin y} = 1 \quad$ (P) $\operatorname{arccot} x \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$g(x) = \operatorname{arccot} x \quad \lim_{x\to\infty} \operatorname{arccot} x = 0$

VOLSF $\quad f(y) = \sin y \quad \lim_{y\to\pi/2} \sin y = 1 \quad$ (S) $\sin y$ spoj $\forall y \in \mathbb{R}$

$g(x) = \arctan x \quad \lim_{x\to\infty} \arctan x = \pi/2$

4e

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^{\sqrt{n^2+1}} = \infty$$

Heine $\quad x_n=\frac{1}{n} \qquad x_n\to 0 \qquad \frac{1}{n}\neq 0 \ \forall n$

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\ln(1+x)\right)^{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}$$

$$=\lim_{x\to 0} e^{\sqrt{1+1/x^2}\cdot\ln\left(1+\ln(1+x)\right)}$$

$$\lim_{x\to 0}\ \underbrace{e^{\sqrt{1+1/x^2}}}_{\to e^{\infty}=\infty}\cdot\underbrace{\frac{\ln\left(1+\ln(1+x)\right)}{1+\ln(1+x)}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\left(1+\ln(1+x)\right)}_{\to 1+0} \overset{\text{VOAL}}{=} \infty$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\ln(1+x)\right)}{1+\ln(1+x)} \overset{l'H}{\underset{0/0}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+\ln(1+x)}\cdot\cancel{\frac{1}{1+x}}}{\cancel{\frac{1}{1+x}}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\ln(1+x)} \overset{\text{VOAL}}{=} \frac{1}{1+0}$$

VOLSF $\quad g(x)=1+x \qquad$ (S) $\ln$ spoj v 1

$f(y)=\ln y$

$\lim_{x\to 0} 1+x = 1 \qquad \lim_{y\to 1}\ln y = 0$

$$\lim_{x\to 0} e^{\sqrt{1+1/x^2}}$$

$f(y)=e^y \qquad \lim_{y\to\infty} e^y=\infty \qquad$ (P) $g(x)\neq\infty$ $\forall x\in P(0,2)$

$g(x)=\sqrt{1+1/x^2} \qquad \lim_{x\to 0}\sqrt{1+1/x^2}=\infty$

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{1+1/x^2}=\infty$$

$f(y)=\sqrt{y} \qquad \lim_{y\to\infty}\sqrt{y}=\infty \qquad$ (P) $1+1/x^2\neq\infty$ $\forall x\in P(0,1/20)$

$g(x)=1+1/x^2 \qquad \lim_{x\to 0} 1+\frac{1}{x^2}=1+\infty=\infty$