# 20. cvičení - L'Hospital + Heine

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

## Teorie

**Věta 1** (l'Hospitalovo pravidlo)**.** Nechť $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $f, g$ jsou reálné funkce a existuje $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Jestliže navíc platí jedna z následujících podmínek

(a) $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = 0$, nebo

(b) $\lim_{x\to a+} |g(x)| = \infty$,

potom

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**Věta 2** (Heineova)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, $A \in \mathbb{R}^*$ a nechť funkce $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$, je definována na nějakém prstencovém okolí bodu $a$. Potom jsou následující dva výroky ekvivalentní:

(i)
$$\lim_{x\to a} f(x) = A;$$

(ii) Pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, splňující $x_n \in M$, $\forall n \in \mathbb{N}:\ x_n \neq a$ a $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

## Příklady

1. Spočtěte limity. Nezapomeňte na Heineho a na fakt, že ne vždy L'Hospital pomůže.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^{60} + 3x - 4}{x^{40} - 2x + 1}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\pi}{2} - \arccos x}{x}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$

(d) ♡ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\tan\frac{1}{n} - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} x^x$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin 2x - 2\arcsin x}{x^3}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x\sin x} - \frac{1}{x^2}$

(h) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{\ln^2(n+1)}{(n-1)^2}$

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\cotg x - 1}{x^2}$

(j) ♡ $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

(k) $\displaystyle\lim_{x\to 1-} \ln x \cdot \ln(1-x)$

(l) ♡ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \cos(n\pi)\frac{n^k}{e^{an}}$, $k \in \mathbb{N}$, $a > 0$.

(m) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}$

(n) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x\sqrt{x}} \left(\sqrt{a}\arctan\sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{b}\arctan\sqrt{\frac{x}{b}}\right)$, $a, b > 0$

2. Rozhodněte, zda je funkce $f(x) = \frac{x\cos 2x \sin 3x}{x^2 - \pi^2}$, $f(\pi) = -\frac{1}{2}$, spojitá v $\pi$.

## Bonus

3. Spočtěte limity

(a) $\lim\limits_{x\to 0+} (\operatorname{cotg} x)^{\sin x}$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{cotg} x - \dfrac{1}{x}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{c^n}{n}$, $c > 1$.

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} (\ln n)^{\frac{1}{n}}$

## Zkouškové příklady

4. Spočtěte limity

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} n^8 \left(2\cos\dfrac{1}{n^2} - 2 + \dfrac{1}{n^4}\right)$

(b) $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\sqrt{e^x - \sin x} - \sqrt{1 + \frac{x^2}{2}}}{\arcsin x - \sin x}$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\cos\frac{3}{n}}{\cos\frac{5}{n}}\right)^{n^2}$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos\operatorname{arctan}\sqrt{n}}{\sin\operatorname{arccot}\sqrt{n}}$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)\right)^{\sqrt{n^2+1}}$

5. Sestrojte funkce $f, g$ rostoucí a spojité na $\mathbb{R}$ takové, že $x^2 = f(x) - g(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

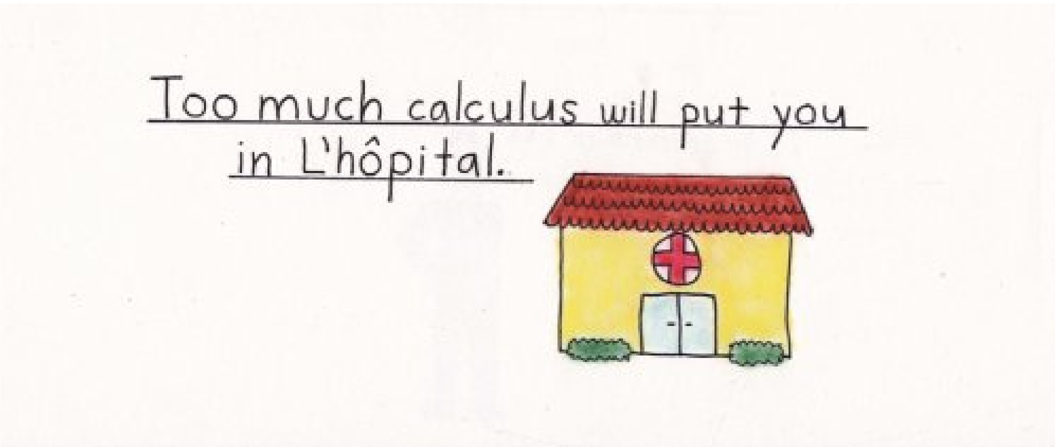


Figure 1: https://twitter.com/everydaycalc/status/722795700795277314

(1d) Použijte l'Hospitala pro $1/n = x \to 0+$
(1d) l'Hospital nefunguje, vytkněte $x$
(1l) Schovejte si kosinus a pak použijte $k$-krát l'Hospitala
(5) Zderivujme. Platí $f' > 0 \implies f$ je rostoucí