19. cvičení - Derivace podruhé

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Definice 1. Nechť f je reálná funkce a $a \in \mathbb{R}$. Jestliže existuje

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

pak tuto limitu nazýváme *derivací* funkce f v bodě a. Značíme $f'(a)$.

Věta 2 (Aritmetika derivací)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}$ a nechť f a g jsou funkce definované na nějakém okolí bodu a. Nechť existují $f'(a) \in \mathbb{R}^*$ a $g'(a) \in \mathbb{R}^*$.

(a) Platí

$$(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a),$$

(b) Je-li alespoň jedna z funkcí f, g **spojitá** v bodě a, pak

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a),$$

(c) Je-li funkce g **spojitá** v bodě a a **navíc** $g(a) \neq 0$, pak

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2},$$

vždy je-li výraz na pravé straně **definován**.

Věta 3 (O derivaci složené funkce)**.** Nechť f má derivaci v bodě $y_0 \in \mathbb{R}$, g má derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 = g(x_0)$ a g je v bodě x_0 **spojitá**. Potom

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0)g'(x_0) = f'(g(x_0))\, g'(x_0),$$

je-li výraz na pravé straně **definován**.

Věta 4. Nechť reálná funkce f je **spojitá** zprava v bodě $a \in \mathbb{R}$ a existuje $\lim_{x \to a_+} f'(x)$. Pak existuje $f'_+(a)$ a platí $f'_+(a) = \lim\limits_{x \to a_+} f'(x)$. Levá strana analogicky.

Algoritmus

1. Určíme definiční obor D_f. Na této množině pak budeme hledat derivaci.

2. Zderivujeme mechanicky tam, kde to lze (musí jít o <u>otevřené</u> intervaly).

3. Prokontrolujeme podmínky derivování, kraje definičních oborů, zlomky, místa, kde se lámem předpis... a identifikujeme problémové body.

   Častí podezřelí: $\arcsin t$, $\arccos t$, $\operatorname{sgn} t$, $|t|$, max a min, odmocniny, funkce definované „vidličkou“.

4. V daných bodech najdeme derivaci z definice nebo z Věty 4. Neexistuje-li derivace, zkusíme najít alespoň jednostranné derivace.

5. Uděláme závěr.

Příklady

Spočtěte derivace (příp. jednostranné derivace) následujících funkcí

1. (a) $f(x) = \arccos(1 - x^2)$
   (b) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$
   (c) $f(x) = \min\{x, x^3\}$
   (d) $f(x) = x^2 e^{-|x-1|}$
   (e) $f(x) = \sqrt[3]{\sin x}$
   (f) $f(x) = \arcsin \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$

Zkouškové příklady

doc. Zeleného: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~zeleny/fsv/mat1/pisemky/m1-97-98.pdf

2. (a) $f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\tan^2 x\right), & x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \frac{\pi}{2}, & x = \frac{\pi}{2} + k\pi. \end{cases}$
   (b) $f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$
   (c) $f(x) = \max\left\{\min\left\{\cos x, \dfrac{1}{2}\right\}, -\dfrac{1}{2}\right\}$
   (d) $f(x) = \arccos \dfrac{1}{1 + x^2}$
   (e) $f(x) = \begin{cases} x^2\left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$
   (f) $f(x) = \max\{x + 4\arctan(\sin x), x\}$

Bonus

3. Uvažujte funkce $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} x, & x \neq 0, \\ -\frac{3}{4}, & x = 0, \end{cases}$ $\quad g(x) = \begin{cases} -\operatorname{sgn} x, & x \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$

   Ukažte, že

   (a) $f'(0)$ a $g'(0)$ existují, ale $(f + g)'(0)$ neexistuje.
   (b) výraz $f'(0)g(0) + f(0)g'(0)$ má smysl, ale $(fg)'(0)$ neexistuje.

4. Nechť $f(x) = 1$ a $g(x) = \begin{cases} -\operatorname{sgn} x, & x \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$

   Ukažte, že výraz $\frac{f'(0)g(0) - f(0)g'(0)}{g^2(0)}$ má smysl, ale $\left(\frac{f}{g}\right)'(0)$ neexistuje.

5. Nechť $f(y) = |y|$ a $g(x) = \begin{cases} -\operatorname{sgn} x, & x \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$

   Ukažte, že výraz $\frac{f'(g(0))g'(0)}{g^2(0)}$ má smysl, ale $(f(g))'(0)$ neexistuje.

6. Najděte taková $a, b \in \mathbb{R}$, aby funkce byla diferencovatelná (vlastní dce) v každém $x \in \mathbb{R}$:

   $f(x) = \begin{cases} ax + b, & x \leq -1 \\ ax^3 + x + 2b, & x > -1. \end{cases}$

7. Kde dělá tazatel chybu?

Given the function:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{if } x \geq 0 \\ x^2 - 1 & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

Question: are we justified to say that the derivative at $f(0)$ exists? If so, what is $f'(0)$? And how do we justify it?

Of course I do realize that the function isn't continuous at $x = 0$ but still since the slope near $x = 0$ seems equal near $0+$ and $0-$ I wondered why we can't say that $f'(0) = 0$

What I tried is this:

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0+} \frac{(x+h)^2+1-(x^2+1)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{(0+h)^2+1-(0^2+1)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{h^2}{h} = h = 0$$
$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0-} \frac{(x+h)^2+1-(x^2+1)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{(0+h)^2+1-(0^2+1)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{h^2}{h} = h = 0$$

My conclusion is that since both the right and left limit using the definition of the derivative exist and generate the same answer the limit exists such that $f'(0) = 0$.

Apparently this is not true, so what is my mistake?

Pochází z: https://math.stackexchange.com/questions/1532014/how-to-apply-the-definition-of-a-derivative-with-a-piecewise-function