18. cvičení - Derivace

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

Spočtěte derivace následujících funkcí, určete definiční obory funkcí i jejich derivací

1. (a) $6x$

   Řešení: $(6x)' = 6 \cdot 1$,

   $x \in \mathbb{R}$

   (b) $x^3 + 2x - \sin x + 2$

   Řešení: $(x^3 + 2x - \sin x + 2)' = 3x^2 + 2 - \cos x + 0$,

   $x \in \mathbb{R}$

   (c) $-2\cos x + 4e^x + \frac{1}{3}x^7$

   Řešení: $(-2\cos x + 4e^x + \frac{1}{3}x^7)' = -2 \cdot (-\sin x) + 4e^x + \frac{1}{3} \cdot 7x^6$,

   $x \in \mathbb{R}$

   (d) $\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$

   Řešení: $(\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}})' = (x^{1/2} + 2x^{-1/2})' = \frac{1}{2}x^{-1/2} - 2\frac{1}{2}x^{-3/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x^3}}$,

   $x > 0$

   (e) $\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x^7}$

   Řešení: $(\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x^7})' = (x^{1/3} - x^{7/4})' = 1/3x^{-2/3} - 7/4x^{3/4} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{7}{4}\sqrt[4]{x^3}$

   $D_f : x \geq 0$, $D_{f'} : x > 0$

   (f) $\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}$

   Řešení:

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}\right)' = \left(x^{-1} + 2x^{-2} + 3x^{-3}\right)' = -x^{-2} - 4x^{-3} - 9x^{-4}$$

   $x \neq 0$

   (g) $\ln x + \frac{\cos x}{\pi}$

   Řešení: $(\ln x + \frac{\cos x}{\pi})' = \frac{1}{x} - \frac{1}{\pi}\sin x$

   $x > 0$

   (h) $\cot x + \tan x$

   Řešení: $(\cot x + \tan x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}$

   $x \neq k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

   (i) $\arcsin x - 3\operatorname{arccot} x$

   Řešení: $(\arcsin x - 3\operatorname{arccot} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3}{1+x^2}$

   $D_f : x \in [-1, 1]$, $D_{f'} : x \in (-1, 1)$

(j) $2\arctan x + \operatorname{arccos}\, x$

Řešení: $(2\arctan x + \operatorname{arccos}\, x)' = \dfrac{2}{1+x^2} + \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$D_f : x \in [-1,1]$, $D_{f'} : x \in (-1,1)$

2. (a) xe^x

Řešení:

$$(xe^x) = x'e^x + x(e^x)' = e^x + xe^x$$

$x \in \mathbb{R}$

(b) $\dfrac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$

Řešení:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}\right)' &= \frac{(1+x-x^2)'(1-x+x^2)-(1+x-x^2)(1-x+x^2)'}{(1-x+x^2)^2}\\ &= \frac{(1-2x)(1-x+x^2)-(1+x-x^2)(-1+2x)}{(1-x+x^2)^2}\end{aligned}$$

$x \in \mathbb{R}$

(c) $x^2e^x\sin x$

Řešení:

$$\begin{aligned}(x^2e^x\sin x)' = (x^2)'e^x\sin x + x^2(e^x\sin x)' = 2xe^x\sin x + x^2((e^x)'\sin x + e^x(\sin x)')\\ = 2xe^x\sin x + x^2(e^x\sin x + e^x\cos x)\end{aligned}$$

$x \in \mathbb{R}$

(d) $\dfrac{3x-2}{x^2+1}$

Řešení:

$$\left(\frac{3x-2}{x^2+1}\right)' = \frac{3(1+x^2)-(3x-2)2x}{(1+x^2)^2}$$

$x \in \mathbb{R}$

(e) $e^x(x^2-2x+2)$ **Řešení:** Aritmetika derivací. Tedy:

$$\begin{aligned}(e^x(x^2-2x+2))' \overset{AD}{=} e^{x}{}'(x^2-2x+2) + e^x(x^2-2x+2)' =\\ e^x(x^2-2x+2) + e^x(2x-2) = e^x \cdot x^2\end{aligned}$$

(f) $\dfrac{1}{\ln x}$

Řešení:

$$\left(\frac{1}{\ln x}\right)' = \frac{0-\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{-1}{x\ln^2 x}$$

$x > 0$, $x \neq 1$

3. (a) $\operatorname{arccot}\, 2x$

Řešení: $(\operatorname{arcctg}\, 2x)' = \frac{-1}{1+(2x)^2} \cdot 2$

$x \in \mathbb{R}$

(b) $(3x^2-2x+10)^{10}$

Řešení: $(3x^2-2x+10)^{10} = 10(3x^2-2x+10)^9(6x-2)$,

$x \in \mathbb{R}$

(c) $\sqrt{x} - \arctan\sqrt{x}$

Řešení:

$$(\sqrt{x} - \arctan\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$D_f : x \geq 0$, $D_{f'} : x > 0$

(d) $\ln^3 x^2$

Řešení:

$$(\ln^3 x^2)' = 3(\ln^2 x^2) \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x$$

$x \neq 0$

(e) $\sqrt{4-x^2}$

Řešení:

$$\sqrt{4-x^2}' = \frac{1}{2\sqrt{4-x^2}}(-2x)$$

$D_f : x \in [-2,2]$, $D_{f'} : x \in (-2,2)$

(f) $\ln(\sin x)$

Řešení:

$$(\ln(\sin x))' = \frac{1}{\sin x}\cos x$$

$\sin x > 0$, tedy $x \in (0,\pi) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

(g) $\ln\ln(x-3) + \arcsin\dfrac{x-5}{2}$

Řešení:

$$\left(\ln\ln(x-3) + \arcsin\frac{x-5}{2}\right)' = \frac{1}{\ln(x-3)}\frac{1}{x-3} + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-5}{2}\right)^2}}\frac{1}{2}$$

$x > 3$, $x-3 > 1$, tedy $x > 4$. Navíc $3 < x < 7$. Celkem $4 < x < 7$

(h) x^x

Řešení: Tady nutno nejprve rozepsat a až poté derivovat:

$$x^x = e^{x\ln x}.$$

To je složená funkce, tedy: $f(x) = e^y$, $f'(x) = e^y$ a $g(x) = x\ln x$ a $g'(x) = 1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x}$ (derivace součinu, x je spojité na celém $\mathbb{R}$). Celkem máme:

$$(e^{x\ln x})' = e^{x\ln x}(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$$

Jelikož se x vyskytuje v logaritmu, tak $x > 0$. Jinak x i $\ln x$ jsou spojité a jejich součin je také spojitý, máme podmínky věty.

(i) $x^{(\sin x)}$
Řešení:
$$(x^{\sin x})' = (e^{\sin x \ln x})' = e^{\sin x \ln x} \cdot (\cos x \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x})$$
$x > 0$

(j) $\sin(\sin(\sin x))$
Řešení: Také složená funkce:
$$(\sin(\sin(\sin x)))' \overset{SD}{=} \cos(\sin(\sin x)) \cdot (\sin(\sin x))' \overset{SD}{=}$$
$$\cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot (\sin x)' \overset{SD}{=} \cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot (\cos x)$$
Všechny funkce jsou spojité na $\mathbb{R}$, tak podmínky věty splněny.

(k) $\ln(\ln^2(\ln^3 x))$
Řešení: Opakovaně zderivujeme složenou funkci, prve: $f(x) = \ln y$, $f'(x) = \frac{1}{y}$, $g(x) = \ln^2(\ln^3 x)$. Tedy máme:
$$(\ln(\ln^2(\ln^3 x)))' \overset{SD}{=} \frac{1}{\ln^2(\ln^3 x)} \cdot (\ln^2(\ln^3 x))'$$
Další derivace: vnější funkce $f(x) = y^2$, $f'(x) = 2y$ a vnitřní $g(x) = \ln(\ln^3 x)$. Celkem:
$$(\ln^2(\ln^3 x))' \overset{SD}{=} 2\ln(\ln^3 x) \cdot (\ln(\ln^3 x))'.$$
Dále, vnější $f(x) = \ln y$, $f'(x) = \frac{1}{y}$ a vnitřní $g(x) = \ln^3 x$. Získali jsme:
$$(\ln(\ln^3 x))' \overset{SD}{=} \frac{1}{\ln^3 x} \cdot (\ln^3 x)'$$
Pokračujeme, vnější $f(x) = y^3$, $f'(x) = 3y^2$ a vnitřní $g(x) = \ln x$, $g'(x) = \frac{1}{x}$, celkem
$$(\ln^3 x)' = 3\ln^2 x \cdot \frac{1}{x}$$
Celá úloha:
$$(\ln(\ln^2(\ln^3 x)))' \overset{SD}{=} \frac{1}{\ln^2(\ln^3 x)} \cdot (\ln^2(\ln^3 x))' \overset{SD}{=} \frac{1}{\ln^2(\ln^3 x)} \cdot 2\ln(\ln^3 x) \cdot (\ln(\ln^3 x))' \overset{SD}{=}$$
$$\frac{1}{\ln^2(\ln^3 x)} \cdot 2\ln(\ln^3 x) \cdot \frac{1}{\ln^3 x} \cdot (\ln^3 x)' \overset{SD}{=} \frac{1}{\ln^2(\ln^3 x)} \cdot 2\ln(\ln^3 x) \cdot \frac{1}{\ln^3 x} \cdot 3\ln^2 x \cdot (\ln x)' \overset{SD}{=}$$
$$\frac{1}{\ln^2(\ln^3 x)} \cdot 2\ln(\ln^3 x) \cdot \frac{1}{\ln^3 x} \cdot 3\ln^2 x \cdot \frac{1}{x} = \frac{6}{x\ln(\ln^3 x)\ln x}$$
Věty jsme používali bez předpokladů, je potřeba je doplnit. Polynomy i logaritmy jsou spojité na svém definičním oboru, takže ten musíme určit. Z logaritmů máme
$$\ln^2(\ln^3 x) > 0$$
$$|\ln^3 x| > 1$$
$$\ln x > 1$$
$$x > e.$$

(l) $\dfrac{\sin^2 x}{\sin x^2}$

Řešení: derivujeme podíl a ještě dvě složené funkce. Nejprve podíl (vše je spojité):

$$\left(\frac{\sin^2 x}{\sin x^2}\right)' \stackrel{AD}{=} \frac{(\sin^2 x)' \sin x^2 - \sin^2 x (\sin x^2)'}{(\sin x^2)^2}$$

a nyní se podíváme na ty složené fce: první případ – $\sin^2 x$, vnější $f(x) = y^2$, $f'(x) = 2y$ a vnitřní $g(x) = \sin x$, $g'(x) = \cos x$, sinus je spojitý, dohromady $(\sin^2 x)' \stackrel{SD}{=} 2 \sin x \cdot \cos x$.
druhý případ – $\sin x^2$, vnější $f(x) = \sin y$, $f'(x) = \cos y$, vnitřní $g(x) = x^2$, $g'(x) = 2x$. Polynomy jsou spojité, máme tedy dohromady
$(\sin x^2)' \stackrel{SD}{=} \cos x^2 \cdot 2x$
Dosadíme zpět a máme:

$$\left(\frac{\sin^2 x}{\sin x^2}\right)' \stackrel{AD}{=} \frac{(\sin^2 x)' \sin x^2 - \sin^2 x (\sin x^2)'}{(\sin x^2)^2} \stackrel{SD}{=} \frac{2 \sin x \cos x \sin x^2 - \sin^2 x \cos x^2 2x}{(\sin x^2)^2}$$

Podmínky: ve jmenovateli nesmí být nula, tedy $x^2 \neq k\pi$.

(m) $2^{\tan \frac{1}{x}}$

Řešení: Nejprve přepíšeme

$$2^{\tan \frac{1}{x}} = e^{\tan \frac{1}{x} \cdot \ln 2}$$

a uvědomíme si, že $\ln 2$ je úplně obyčejná konstanta ten zbytek je složená funkce. Máme vnější funkci $f(x) = e^y$, $f'(x) = e^y$, vnitřní $g(x) = \ln 2 \tan \frac{1}{x}$, spojitost vyřešíme za chvíli a máme:

$$\left(e^{\tan \frac{1}{x} \cdot \ln 2}\right)' = e^{\tan \frac{1}{x} \cdot \ln 2} \cdot \left(\ln 2 \tan \frac{1}{x}\right)'$$

Opět složená funkce, vnější $f(x) = \tan y$, $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 y}$ vnitřní $g(x) = \frac{1}{x}$, $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x}$ je spojitá mimo nulu, celkem $\left(\tan \frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{x}} \cdot \frac{-1}{x^2}$ takže máme:

$$\left(e^{\tan \frac{1}{x} \cdot \ln 2}\right)' = e^{\tan \frac{1}{x} \cdot \ln 2} \cdot \left(\tan \frac{1}{x}\right)' = 2^{\tan \frac{1}{x}} \cdot \ln 2 \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{x}} \cdot \frac{-1}{x^2}$$

Podmínky: $\frac{1}{x} \neq 0$ a kvůli tangens $\frac{1}{x} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Potřebovali jsme spojitost $\tan \frac{1}{x}$, který je spojitý na příslušných intervalech.

(n) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arccotg} \dfrac{\sqrt{2}}{x}$

Řešení: Složená funkce: vnější $f(x) = \operatorname{arcctg} y$, $f'(y) = \frac{-1}{1+y^2}$ a vnitřní $g(x) = \frac{\sqrt{2}}{x}$, $g'(x) = \sqrt{2}\frac{-1}{x^2}$, g je spojitá mimo 0, takže:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{2}}{x}\right)' \overset{SD}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{-1}{1+\frac{2}{x^2}}\sqrt{2}\cdot\frac{-1}{x^2} = \frac{1}{2+x^2}$$

Podmínky: $x \neq 0$.

(o) $\dfrac{x^p(1-x)^q}{1+x}, \qquad p,q>0$

Řešení: Dce podílu a zároveň součinu:

$$\left(\frac{x^p(1-x)^q}{1+x}\right)' \overset{AD}{=} \frac{[px^{p-1}(1-x)^q + x^p q(1-x)^{q-1}(-1)](1+x) - x^p(1-x)^q\cdot 1}{(1+x)^2}$$

Podmínky: $x \neq -1$, což nám zároveň zaručí spojitost pro podmínky věty.

4. (a) $\ln\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

Řešení: Příklad máme z https://users.math.cas.cz/~vanzura/SBIR8.PDF

Z věty o derivaci složené funkce máme

$$\left(\ln\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)' = \frac{x^2+1}{x^2-1}\cdot\frac{2x(x^2+1)-2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)(x^2-1)}$$

$x \in (-\infty,-1)\cup(1,\infty)$

(b) $\operatorname{arccot}\dfrac{2x}{x^2-1}$

Řešení: Příklad máme z https://is.muni.cz/do/sci/UMS/el/analyza/pages/derivace.html

Z věty o derivaci složené funkce máme

$$\left(\operatorname{arccot}\frac{2x}{x^2-1}\right)' = \frac{-1}{1+\frac{2x}{x^2-1}}\cdot\frac{2(x^2-1)-2x2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2}{1+x^2}.$$

$x \neq \pm 1$

(c) $\sqrt{1+e^{\sqrt{3+x^2}}}$

Řešení: Z věty o derivaci složené funkce máme

$$\left(\sqrt{1+e^{\sqrt{3+x^2}}}\right)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+e^{\sqrt{3+x^2}}}}\cdot e^{\sqrt{3+x^2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3+x^2}}\cdot 2x$$

$x \in \mathbb{R}$

(d) $\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

Řešení: Z věty o derivaci složené funkce máme

$$\left(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)' = \frac{(e^x+e^{-x})(e^x+e^{-x})-(e^x-e^{-x})(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$$

$x \in \mathbb{R}$

(e) $\sin(\arcsin x)$
Řešení:

$$(\sin(\arcsin x))' = \cos(\arcsin x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$D_f : x \in [-1,1]$, $D_{f'} : x \in (-1,1)$

(f) $\ln(\ln x) + \ln(\ln 2)$
Řešení:
Aplikujeme derivaci složené funkce a fakt, že $\ln(\ln 2))$ je konstanta:

$$(\ln(\ln x) + \ln(\ln 2))' = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} + 0$$

$x > 1$

5. Vypočtěte derivace (i jednostranné) následujících funkcí
Toto cvičení máme z https://users.math.cas.cz/~vanzura/SBIR8.PDF

(a) $f(x) = x \cdot |x|$
Řešení: Funkci lze rozepsat jako

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0. \end{cases}$$

Pak máme

$$f'(x) = \begin{cases} -2x, & x < 0 \\ 2x, & x > 0. \end{cases}$$

Zbývá vyšetřit derivaci v 0.
1. možnost: z definice. Pro derivaci zprava a zleva máme

$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{h^2 - 0}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{h^2}{h} = 0.$$

a

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{-h^2 - 0}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{-h^2}{h} = 0.$$

Závěr: derivace v 0 existuje a rovná se 0.
2. možnost: z věty.
Funkce je spojitá v 0, tedy z věty máme

$$f'_+(0) = \lim_{a \to 0+} f'(x) = \lim_{a \to 0+} 2x = 0.$$

a

$$f'_-(0) = \lim_{a \to 0-} f'(x) = \lim_{a \to 0-} -2x = 0.$$

Dohromady $f'(0) = 0$.

(b)

$$f(x)=\begin{cases} 1-x, & x\in(-\infty,1)\\ (1-x)(2-x), & [1,2]\\ -(2-x), & (2,\infty)\end{cases}$$

Řešení:
Na otevřených intervalech máme

$$f(x)=\begin{cases} -1, & x\in(-\infty,1)\\ 2x-3, & (1,2)\\ 1, & (2,\infty)\end{cases}$$

Protože funkce je spojitá na celém $\mathbb{R}$, lze derivace v bodech 1 a 2 dopočítat z věty.

$$f'_+(1)=\lim_{a\to 1+} f'(x)=\lim_{a\to 1+} 2x-3=-1.$$

a

$$f'_-(1)=\lim_{a\to 1-} f'(x)=\lim_{a\to 1-} -1=-1.$$

Dohromady $f'(1)=-1$.

$$f'_+(2)=\lim_{a\to 2+} f'(x)=\lim_{a\to 2+} 1=1.$$

a

$$f'_-(2)=\lim_{a\to 2-} f'(x)=\lim_{a\to 2-} 2x-3=1.$$

Dohromady $f'(2)=1$.

(c) $f(x)=|\ln|x||$
Řešení: Prve funkci rozepíšeme

$$f(x)=\begin{cases} \ln(-x), & x\in(-\infty,-1)\\ -\ln(-x), & x\in[-1,0)\\ -\ln(x), & x\in(0,1)\\ \ln(x), & x\in[1,\infty)\end{cases}$$

Derivace ve vnitřních bodech intervalů:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}, & x\in(-\infty,-1)\\ -\frac{1}{x}, & x\in(-1,0)\\ -\frac{1}{x}, & x\in(0,1)\\ \frac{1}{x}, & x\in(1,\infty)\end{cases}$$

Funkce je spojitá na svém definičním oboru $D_f=(-\infty,0)\cup(0,\infty)$.
Pro body ±1 tedy můžeme použít větu.

$$f'_+(1)=\lim_{a\to 1+} f'(x)=\lim_{a\to 1+}\frac{1}{x}=1.$$

a

$$f'_-(1) = \lim_{a \to 1-} f'(x) = \lim_{a \to 1-} -\frac{1}{x} = -1.$$

Protože derivace zleva a zprava se nerovnají, tak derivace $f'(1)$ neexistuje.
Analogicky

$$f'_+(-1) = \lim_{a \to -1+} f'(x) = \lim_{a \to -1+} -\frac{1}{x} = -1.$$

a

$$f'_-(-1) = \lim_{a \to -1-} f'(x) = \lim_{a \to -1-} \frac{1}{x} = 1.$$

Protože derivace zleva a zprava se nerovnají, tak derivace $f'(-1)$ neexistuje.

Bonus

6. Zderivujte funkci $f(x) = \lfloor x \rfloor \sin^2 \pi x$.

Řešení: Příklad máme z https://users.math.cas.cz/~vanzura/SBIR8.PDF

Zafixujme $k \in \mathbb{Z}$ a uvažujme interval $I_k = (k, k+1)$.

Pro funkci a její derivaci pak platí $f(x) = k \sin^2 \pi x$, $f'(x) = k \cdot 2\sin(\pi x)\cos(\pi x)\pi$, $x \in I_k$.

Protože funkce je spojitá zprava, z věty platí

$$f'_+(k) = \lim_{x \to k+} k \cdot 2\sin(\pi x)\cos(\pi x)\pi = 0.$$

Derivaci $f'_-(k)$ spočítáme z definice

$$\begin{aligned} f'_-(k) &= \lim_{h \to 0-} \frac{\lfloor k+h \rfloor \sin^2(\pi(k+h)) - k\sin^2(\pi k)}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{(k-1)\sin^2(\pi(k+h))}{h} \\ &= (k-1) \lim_{h \to 0-} \frac{(\sin(\pi k)\cos(\pi h) + \cos(\pi k)\sin(\pi h))^2}{h} \\ &= (k-1) \lim_{h \to 0-} \frac{((-1)^k \sin(\pi h))^2}{h} = (k-1) \lim_{h \to 0-} \frac{\sin(\pi h)}{\pi h} \cdot \pi \sin(\pi h) \overset{AL}{=} 0. \end{aligned}$$

Závěr: derivace $f'(k) = 0$.