17. cvičení - limity typu f^g

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Spočtěte limity

   (a)
   $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

   Řešení:
   $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$
   Vnitřní funkce:
   $$\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1,$$
   neboť další vnitřní funkce
   $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y} = 1$$
   a
   $$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0.$$
   (podmínka P, $g(x)=\frac{1}{x}\neq 0$ pro $\forall x\in(0,\infty)$.)
   Zpět k funkci
   $$\lim_{x\to\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = e^1,$$
   tady podmínka S, e^z je spojitá funkce v bodě 1.

   (b)
   $$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x = e^{-2},$$
   analogicky.

   (c)
   $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x^2}\right)^x$$

   Řešení:
   $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x^2}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}$$
   Vnitřní funkce:
   $$\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{2}{x^2}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x^2}\frac{\ln\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}{\frac{2}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}\frac{\ln\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}{\frac{2}{x^2}} \overset{VOAL}{=} 0\cdot 1 = 0$$
   Použita vnitřní funkce na logaritmus, podmínka P, $2/x^2\neq 0$ na $(0,\infty)$.
   Celkem tedy
   $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x^2}\right)^x = e^0 = 1,$$
   (podmínka S, e^y spojitá v 0.)

2. Spočtěte limity

(a)

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)}$$

Řešení:
Použijeme úpravy na exponent a dostaneme

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)} = \lim_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-x)/[(1-x)(1+\sqrt{x})]} =$$

a nyní zkrácením a dosazením dostaneme

$$= \frac{2}{3}^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

(b)

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)}$$

Řešení:
Použijeme klasický trik převedení do exponentu za použití vzorce $y = e^{\ln y}$.

$$= \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)} = \lim_{x\to +\infty} \exp\left[\ln\left(\frac{1+x}{2+x}\right)\cdot\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right] =$$

Užijeme VOLSF (varianta (S) a pro vnitřní funkci dostaneme

$$\lim_{x\to +\infty} \ln\frac{1+x}{2+x}\cdot\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}$$

Vytkneme x v čitateli a jmenovateli obou zlomků a vyjde, že

$$\ln 1\cdot 0 = 0.$$

Užilil jsme vnitřní funkci na logaritmus, podmínka (S).
Pro původní limitu pak máme

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)} = e^0 = 1.$$

(c)

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}$$

Řešení:
Upravujeme.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2} = \lim_{x\to\infty}\exp\left[\ln\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)\cdot x^2\right]$$

Spočteme limitu vnitřní funkce

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)\cdot x^2 = \ln\left(\frac{1}{2}\right)\infty = -\infty$$

Původní limita: Protože $\lim_{y\to-\infty} e^y = 0$, máme

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2} = 0$$

(VOLSF, podmínka P.)

(d)

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}}$$

Řešení:
Upravujeme.

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}} = \lim_{x\to\infty} \exp\left[\ln\left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)\cdot\frac{x^3}{1-x}\right]$$

Vnitřní funkce

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)\cdot\frac{x^3}{1-x} = \ln\frac{3}{2}\cdot-\infty = -\infty$$

Protože $\lim_{y\to-\infty} e^y = 0$, pro původní limitu pak je

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}} = 0$$

(e)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}+} \left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+x\right)\right]^{\operatorname{tg}2x}$$

Řešení:
Upravíme

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}+} \left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+x\right)\right]^{\operatorname{tg}2x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}+} \exp\left\{\ln\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+x\right)\right]\cdot\operatorname{tg}2x\right\} =$$

Pro vnitřní funkci máme

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}+} \left\{\ln\left(\operatorname{tg}\frac{3}{8}\pi\right)\cdot-\infty\right\} = -\infty.$$

Dohromady pak

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}+} \left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+x\right)\right]^{\operatorname{tg}2x} = 0.$$

(f)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$$

Řešení:
Upravíme

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}=\lim_{x\to\infty}\exp\left[\ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)\cdot\frac{x-1}{x+1}\right]$$

Pro vnitřní funkci:

$$\left[\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)\cdot\frac{x-1}{x+1}\right]=[\ln 1\cdot 1]=0.$$

Dohromady

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}=e^0=1$$

Podmínka (S).

(g)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}\right)^{1/x}$$

Řešení: Upravíme

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}\right)^{1/x}=\lim_{x\to\infty}\exp\left[\ln\left(\frac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}\right)\cdot\frac{1}{x}\right]=\exp\left[\ln\frac{1}{2}\cdot 0\right]=e^0=1.$$

3. Spočtěte limity

(a)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x+1}{\ln x}\right)^{\ln x}$$

Řešení:
substituce $y=\ln x$ (věta o limitě složené funkce, podmínka P).

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x+1}{\ln x}\right)^{\ln x}=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y+1}{y}\right)^{y}=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}=e.$$

(b)

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$$

Řešení:

$$=\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{\sin^2 x}}=\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{x^2}{\sin^2 x}\cdot\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\left[(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}\right]^{\frac{x^2}{\sin^2 x}}=$$

Rozepíšeme

$$= \lim_{x\to 0} \exp\left[\left(\ln(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{x^2}{\sin^2 x}\right)\right]$$

Máme

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin^2 x} = 1$$

Dále (VOLSF (S))

$$\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \exp\left[\frac{1}{x^2}\ln(1+x^2) = e\right]$$

Tedy

$$= \lim_{x\to 0}\left(\ln(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{x^2}{\sin^2 x}\right) = \ln(e)\cdot 1 = 1.$$

Původní limita pak je

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = e^1$$

(c)

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\operatorname{cotg}^2 x}$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\operatorname{cotg}^2 x} = \lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0}(1+x^2)^{-1}\cdot\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{\sin^2 x}} =$$

První limitu spočteme snadno dosazením, vyjde $(1+0)^{-1} = 1^{-1} = 1$. Zbyde tedy pouze druhá limita, která ale vede na předchozí příklad.
Celkový výsledek

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\operatorname{cotg}^2 x} = e$$

(d)

$$\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\sin x}} = e$$

Řešení: Přepíšeme na

$$\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x\to 0} \exp\left[\frac{1}{\sin x}\ln(1+\operatorname{tg} x)\right]$$

Vnitřní limitu rozšíříme

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin x}\ln(1+\operatorname{tg} x) = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}\cdot\frac{\ln(1+\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\ln(1+\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} \overset{VOAL}{=} 1\cdot 1.$$

Dohromady pak máme

$$\lim_{x\to 0}\exp\left[\frac{1}{\sin x}\ln(1+\operatorname{tg} x)\right] = e^1 = e$$

Užili jsme VOLSF, $g(x) = \operatorname{tg} x$, $\lim_{x\to 0}\operatorname{tg} x = 0$, $f(y) = \ln(1+y)/y$, $\lim_{y\to 0} f(y) = 1$.

(e)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{1/\sin x}$$

Řešení:
Je zřejmé pomocí substituce $y = \sin x$, že

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = e.$$

(Úplně lze důkaz provést počítáním jednostranných limit a substitucí $z = \frac{1}{y}$.)
Problematická je tedy pouze limita

$$\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\sin x}} =$$

Tu řešíme pomocí chytrého rozšíření exponentu a exponenciálního triku: využíváme též větu o limitě součinu a spojitost logaritmu (tj. možnost přehození limity a logaritmu).

$$= \lim_{x\to 0}\left[(1+\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}\right]^{\frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}} = \exp\left[\ln \lim_{x\to 0}\left(1+\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}\right)\cdot \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}\right] =$$

Nyní první limita je po substituci $y = \operatorname{tg} x$ rovna e a druhá je zřejmě rovna jedné, jak plyne z faktu $\frac{\operatorname{tg} x}{\sin x} = \frac{1}{\cos x}$.

$$= \exp\left[\ln e\right] = e^1 = e.$$

Pokud dáme oba výsledky dohromady a využijeme větu o limitě podílu, plyne odtud

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}} = \frac{e}{e} = 1.$$

(f)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$$

Řešení:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+(\sin x-1))^{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[(1+(\sin x-1))^{\frac{1}{\sin x-1}}\right]^{(\sin x-1)\operatorname{tg} x} =$$

Přechod pomocí exponenciálního triku.

$$= \exp\left[\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x-1)\operatorname{tg} x\right] = \exp\left[\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-1}{\cos x}\right] =$$

Nyní je možné použít pro lepší vhled třeba substituci $y = x-\pi/2$, přičemž se snadno ukáže ze součtových vzorců, že $\sin(y+\pi/2) = \cos y$ a $\cos(y+\pi/2) = -\sin y$.

$$= \exp\left[\lim_{y\to 0}\frac{\cos y-1}{-\sin y}\right] = \exp\left[\lim_{y\to 0}\frac{\frac{1-\cos y}{y^2}}{\frac{\sin y}{y}}\cdot y\right] = \exp\left[\frac{\frac{1}{2}}{1}\cdot 0\right] = e^0 = 1.$$

(g)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x$$

Řešení:
Jednoduchou úpravou dostaneme

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-a+2a}{x-a}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^x=e^{2a}.$$

Zkouškové příklady

4. Spočtěte limity

(a) $\lim\limits_{x\to0+}\left(1-\sqrt{\arcsin x}\right)^{\frac{1}{\sqrt[4]{1-\cos x}}}$

Řešení: Přepíšeme jako:

$$\lim_{x\to0+}\left(1-\sqrt{\arcsin x}\right)^{\frac{1}{\sqrt[4]{1-\cos x}}}=\lim_{x\to0+}\exp\left[\frac{1}{\sqrt[4]{1-\cos x}}\ln\left(1-\sqrt{\arcsin x}\right)\right]$$

Spočteme limitu vnitřní funkce:

$$\lim_{x\to0+}\frac{1}{\sqrt[4]{1-\cos x}}\ln\left(1-\sqrt{\arcsin x}\right)=\lim_{x\to0+}-\sqrt[4]{\frac{x^2}{1-\cos x}}\cdot\frac{\ln\left(1-\sqrt{\arcsin x}\right)}{-\sqrt{\arcsin x}}\cdot\sqrt{\frac{\arcsin x}{x}}$$
$$\overset{VOAL}{=}-\sqrt[4]{2}\cdot1\cdot1=-\sqrt[4]{2}$$

Pak pro původní limitu máme

$$\lim_{x\to0+}\left(1-\sqrt{\arcsin x}\right)^{\frac{1}{\sqrt[4]{1-\cos x}}}=e^{-\sqrt[4]{2}}$$

Užili jsme VOLSF na:

i. $f=e^y$, $g=\frac{1}{\sqrt[4]{1-\cos x}}\ln\left(1-\sqrt{\arcsin x}\right)$, podmínka (S)
ii. $f=\sqrt[4]{y}$, $g=\frac{x^2}{1-\cos x}$, podmínka (S)
iii. $f=\sqrt{y}$, $g=\frac{\arcsin x}{x}$, podmínka (S)
iv. $f=\frac{\ln 1+y}{y}$, $g=-\sqrt{\arcsin x}$, podmínka (P): $\arcsin x\neq0$ na $P(0,\frac{1}{2})$.

(b) $\lim\limits_{x\to0}\left(2e^{\frac{4x}{x+1}}-1\right)^{\frac{x^2+1}{3x}}$

Řešení: Přepíšeme

$$\lim_{x\to0}\left(2e^{\frac{4x}{x+1}}-1\right)^{\frac{x^2+1}{3x}}=\lim_{x\to0}\exp\left[\frac{x^2+1}{3x}\ln\left(2e^{\frac{4x}{x+1}}-1\right)\right]$$

Pro vnitřní funkci máme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{3x}\ln\left(2e^{\frac{4x}{x+1}}-1\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{3x}\frac{\ln\left(2e^{\frac{4x}{x+1}}-1\right)}{2e^{\frac{4x}{x+1}}-2}\cdot 2\frac{e^{\frac{4x}{x+1}}-1}{\frac{4x}{x+1}}\cdot\frac{4x}{x+1}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{4}{3}\cdot\frac{x^2+1}{x+1}\frac{\ln\left(2e^{\frac{4x}{x+1}}-1\right)}{2e^{\frac{4x}{x+1}}-2}\cdot 2\frac{e^{\frac{4x}{x+1}}-1}{\frac{4x}{x+1}}\\ &\overset{VOAL}{=}\frac{4}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 2\cdot 1=\frac{8}{3}\end{aligned}$$

Původní limita pak je

$$\lim_{x\to 0}\left(2e^{\frac{4x}{x+1}}-1\right)^{\frac{x^2+1}{3x}}=e^{\frac{8}{3}}$$

(Podmínky VOLSF nechány na čtenáři.)

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\left(\frac{4^x+5^x+6^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$

Řešení: Píšeme jako

$$\lim_{x\to 0+}\left(\frac{4^x+5^x+6^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0+}\exp\left[\frac{1}{x}\ln\left(\frac{4^x+5^x+6^x}{3}\right)\right]$$

Pro vnitřní funkci máme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{4^x+5^x+6^x}{3}\right) &= \lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}\cdot\frac{\ln\left(\frac{4^x+5^x+6^x}{3}\right)}{\frac{4^x+5^x+6^x}{3}-1}\cdot\frac{4^x+5^x+6^x-3}{3}\\ &= \lim_{x\to 0+}\frac{1}{3}\cdot\frac{\ln\left(\frac{4^x+5^x+6^x}{3}\right)}{\frac{4^x+5^x+6^x}{3}-1}\cdot\left(\frac{4^x-1}{x}+\frac{5^x-1}{x}+\frac{6^x-1}{x}\right)\\ &\overset{VOAL}{=}\frac{1}{3}\cdot 1\cdot(\ln 4+\ln 5+\ln 6)=\ln 120^{1/3}\end{aligned}$$

Protože máme

$$\lim_{x\to 0+}\frac{4^x-1}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{e^{x\ln 4}-1}{x\ln 4}\cdot\ln 4=\ln 4.$$

Analogicky

$$\lim_{x\to 0+}\frac{5^x-1}{x}=\ln 5$$

a

$$\lim_{x\to 0+}\frac{6^x-1}{x}=\ln 6$$

Původní limita:

$$\lim_{x\to 0+}\left(\frac{4^x+5^x+6^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\sqrt[3]{120}$$

(Podmínky VOLSF nechány na čtenáři.)

Teorie

5. Nechť f je funkce spojitá na $\mathbb{R}$. Nechť navíc $f(x) = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{Q}$. Ukažte, že pak $f(x) = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

   Řešení:

   Pro spor předpokládejme, že pro nějaké $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ je $f(a) = A \neq 0$. Pro jednoduchost předpokládejme, že $A > 0$ Protože f je spojitá, tak i $\lim_{x \to a} = A$.

   Zvolme $\varepsilon = \frac{|A|}{2}$. Pak existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $x \in (a - \delta, a + \delta)$ platí $|f(x) - A| < \frac{|A|}{2}$. Neboli
   $$0 < \frac{A}{2} < f(x) < \frac{3A}{2}.$$
   Jelikož ale v každém intervalu $(a - \delta, a + \delta)$ existuje racionální x', které má $f(x') = 0$, máme spor.

   (Pro $A < 0$ postupujeme analogicky.)

6. Sestrojte spojitou nezápornou funkci f definovanou na $\mathbb{R}$ takovou, že: pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $0 \in f([n, \infty)$ a f není omezená na intervalu $[n, \infty)$.

   Řešení:

   Např. $f(x) = x \sin(\pi x)$.