17. cvičení - limity typu f^g

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Následující limity lze počítat přímo použitím exponenciálního triku, totiž postupem využívajícího větu o limitě složené funkce (u níž je pak třeba ověřit podmínky). Schematicky lze zapsat

$$\lim_{x\to a} f^g = \lim_{x\to a} e^{g\ln f} = e^{\lim\limits_{x\to a}(g\ln f)}.$$

Často se pro přehlednout píše e^y jako $\exp[y]$. Tedy předchozí řádek by vypadal

$$\lim_{x\to a} f^g = \lim_{x\to a} \exp[g\ln f] = \exp\left[\lim_{x\to a}(g\ln f)\right].$$

Limity typu 1^∞

Ukážeme si, jak se tato metoda používá na limity typu 1^∞. To znamená, že počítáme limitu $\lim f(x)^{g(x)}$, kde $\lim f(x) = 1$ a $\lim g(x) = \infty$. Velmi schematicky znázorněno:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} &= \lim_{x\to a}(1+(f(x)-1))^{g(x)} = \exp\left[\lim_{x\to a} g(x)\ln(1+(f(x)-1))\right]\\ &= \exp\left[\lim_{x\to a} g(x)(f(x)-1)\frac{\ln(1+(f(x)-1))}{f(x)-1}\right] = \exp\left[\lim_{x\to a} g(x)(f(x)-1)\right].\end{aligned}$$

Při výpočtech je pak třebě několikrát použít a ověřit podmínky VOLSF.

Dodejme, že tento převod se dá odvodit i jednodušeji s použitím limity $\lim_{y\to 1}\frac{\ln y}{y-1} = 1$, neboť (zkráceně psáno) platí

$$\lim f^g = \exp\left[\lim g\ln f\right] = \exp\left[\lim\left(\frac{\ln f}{f-1}\right)\cdot \lim g(f-1)\right] = \exp\left[\lim g(f-1)\right].$$

Příklady

1. Spočtěte limity

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x^2}\right)^x$

2. Spočtěte limity

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)}$

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)}$

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}$

   (d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}}$

   (e) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{4}+}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+x\right)\right]^{\operatorname{tg} 2x}$

   (f) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$

(g) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}\right)^{1/x}$

3. Spočtěte limity

(a) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x+1}{\ln x}\right)^{\ln x}$

(b) $\lim_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$

(c) $\lim_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\operatorname{cotg}^2 x}$

(d) $\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\sin x}}$

(e) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{1/\sin x}$

(f) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$

(g) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^{x}$

Zkouškové příklady

4. Spočtěte limity

(a) $\lim_{x\to 0+}\left(1-\sqrt{\arcsin x}\right)^{\frac{1}{\sqrt[4]{1-\cos x}}}$

(b) $\lim_{x\to 0}\left(2e^{\frac{4x}{x+1}}-1\right)^{\frac{x^2+1}{3x}}$

(c) $\lim_{x\to 0+}\left(\frac{4^x+5^x+6^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$

Teorie

5. Nechť f je funkce spojitá na $\mathbb{R}$. Nechť navíc $f(x)=0$ pro všechna $x\in\mathbb{Q}$. Ukažte, že pak $f(x)=0$ pro všechna $x\in\mathbb{R}$.

6. Sestrojte spojitou nezápornou funkci f definovanou na $\mathbb{R}$ takovou, že: pro každé $n\in\mathbb{N}$ platí $0\in f([n,\infty)$ a f není omezená na intervalu $[n,\infty)$.