

16. cvičení - Exponenciála a logaritmus + VOLSF

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Spočtěte limity zadaných funkcí

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{x}$

Řešení:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 3 \frac{\ln(1+3x)}{3x} =$$

VOLSF, podmínka P: $3x \neq 0$ na okolí 0.

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 - \frac{3}{x}\right)$

Řešení:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 - \frac{3}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 - \frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} -3 \frac{\ln \left(1 - \frac{3}{x}\right)}{\frac{-3}{x}} = -3$$

VOLSF, podmínka P: $-3/x \neq 0$ na okolí ∞ .

(c) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{e^2 - e^{2x}}}{\arccos x} = e$

Řešení: Příklad máme odsud: <https://reseneulohy.cz/cs/matematika/matematika-analyza>

Převédeme na základní limitu pro $\arccos x$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{e^2 - e^{2x}}}{\arccos x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{e^2 - e^{2x}}}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{\sqrt{1-x}}{\arccos x}$$

První limitu nyní převédeme na limitu pro e^x .

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{e^2 - e^{2x}}}{\sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{e^{2x}(e^{2(1-x)} - 1)}}{\sqrt{\frac{2(1-x)}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} e^x \sqrt{2} \sqrt{\frac{e^{2(1-x)} - 1}{2(1-x)}} \stackrel{VOAL}{=} e^1 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{1}.$$

Pro původní limitu pak máme

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{e^2 - e^{2x}}}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{\sqrt{1-x}}{\arccos x} \stackrel{VOAL}{=} e \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = e.$$

Odůvodnění:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{2(1-x)} - 1}{2(1-x)} = 1.$$

Vnější funkce $\frac{e^y - 1}{y}$, vnitřní $2(1-x)$. Navíc $\lim_{x \rightarrow 1^-} 2(1-x) = 0$ a $2(1-x)$ je monotónní na \mathbb{R} , tedy $2(1-x) \neq 0$ na $P(0, 42)$.

Potom

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{\frac{e^{2(1-x)} - 1}{2(1-x)}} = \sqrt{1}.$$

Vnější funkce \sqrt{y} , vnitřní $\frac{e^{2(1-x)} - 1}{2(1-x)}$. Podmínka (S): \sqrt{y} je spojitá v bodě 1.

$$(d) \heartsuit \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 - x + 1)}{\ln(x^{10} + x + 1)}$$

Řešení:

Postupujeme vytknutím.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 - x + 1)}{\ln(x^{10} + x + 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x^2 (1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}{\ln x^{10} (1 + \frac{1}{x^9} + \frac{1}{x^{10}})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x^2 + \ln(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}{\ln x^{10} + \ln(1 + \frac{1}{x^9} + \frac{1}{x^{10}})} =$$

Z vlastností logaritmu:

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x + \ln(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}{10 \ln x + \ln(1 + \frac{1}{x^9} + \frac{1}{x^{10}})} =$$

A konečně poslední vytknutí

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \ln(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}) / \ln x}{10 + \ln(1 + \frac{1}{x^9} + \frac{1}{x^{10}}) / \ln x} = \frac{2 + 0}{10 + 0} = \frac{1}{5}.$$

Výpočet limity využívá věty o algebře limit a VOLSF (spojitost logaritmu)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}{1} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = \ln(1 - 0 + 0) \cdot 0 = 0.$$

$$(e) \heartsuit \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - 1}{e^{x^2} - 1}$$

Řešení:

Sledujte výpočet.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - 1}{e^{x^2} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1 + x \sin x} - 1)/x^2}{(e^{x^2} - 1)/x^2} =$$

Po použití věty o limitě podílu (limita jmenovatele je rovna jedné) pokračujeme rozšířením odmocniny.

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x \sin x - 1}{x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1 + x \sin x} + 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1 + x \sin x} + 1} = 1 \cdot \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$(f) \heartsuit \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^3 - \arctan x)}{\ln(x^2 + \arctan x)}$$

Řešení:

Vytkneme dominantní člen

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^3 - \arctan x)}{\ln(x^2 + \arctan x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x^3 (1 - \frac{\arctan x}{x^3})}{\ln x^2 (1 + \frac{\arctan x}{x^2})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 \ln x + \ln(1 - \frac{\arctan x}{x^3})}{2 \ln x + \ln(1 + \frac{\arctan x}{x^2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{\ln(1 - \frac{\arctan x}{x^3})}{\ln x}}{2 + \frac{\ln(1 + \frac{\arctan x}{x^2})}{\ln x}} \stackrel{VOAL}{=} \frac{3 + 0}{2 + 0} \end{aligned}$$

Použili jsme limity

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x}{x^3} = 0 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x}{x^2},$$

neb $\arctan x$ je omezená a $1/x^2$ ($1/x^3$) mizející funkce.

Dále jsme použili spojitosti logaritmu (v 1) a opět součin omezené a mizející.

$$(g) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\ln(x^2 + 4)} - \ln x^2}{\operatorname{arccot} x}$$

Řešení: Příklad máme odsud: <https://reseneulohy.cz/cs/matematika/matematika-analyza>

Rozepíšeme dle vzorců pro logaritmus a půjčíme a vrátíme na známé limity:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\ln(x^2 + 4)} - \ln x^2}{\operatorname{arccot} x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\ln\left(\frac{x^2+4}{x^2}\right)}}{\operatorname{arccot} x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot \sqrt{\ln\left(\frac{x^2+4}{x^2}\right)}}{x \cdot \operatorname{arccot} x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sqrt{\frac{4}{x^2}} \cdot \sqrt{\frac{\ln\left(1 + \frac{4}{x^2}\right)}{\frac{4}{x^2}}} \cdot \frac{1}{x \cdot \operatorname{arccot} x} \\ &\stackrel{VOL}{=} 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2. \end{aligned}$$

Odůvodnění:

Protože jsme na okolí nekonečna, máme $\sqrt{x^2} = |x| = x$. Tedy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \sqrt{\frac{4}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x} \cdot 2 = 2.$$

Dále

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{4}{x^2}\right)}{\frac{4}{x^2}} = 1.$$

Jde o VOLSF, podmínka (P): vnitřní funkce $\frac{4}{x^2} \neq 0$ na $P(\infty, 1)$.

Navíc

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\ln\left(1 + \frac{4}{x^2}\right)}{\frac{4}{x^2}}} = 1,$$

VOLSF, vnější funkce \sqrt{y} je spojitá v 1.

$$(h) \heartsuit \lim_{x \rightarrow +\infty} x [\ln(x+1) - \ln x]$$

Řešení: Užijeme pravidla, že rozdíl logaritmů je logaritmus podílu a spojitosti logaritmu.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x [\ln(x+1) - \ln x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \frac{x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \\ &= \ln \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right] = \ln[e] = 1. \end{aligned}$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\ln(1-x^2)}$$

Řešení:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\ln(1-x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \cdot \frac{-x^2}{\ln(1-x^2)} \stackrel{VOAL}{=} -1$$

Podmínka P pro $\pm x^2 \neq 0$ na okolí 0.

(j) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 - \frac{2}{x^2}\right)$

Řešení:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 - \frac{2}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2 \ln \left(1 - \frac{2}{x^2}\right)}{\frac{-2}{x^2}} \stackrel{VOAL}{=} 0 \cdot 1 = 0$$

Podmínka P pro $-2/x^2 \neq 0$ na okolí ∞ .

(k) $\heartsuit \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2 + e^{3x})}{\ln(3 + e^{2x})}$

Řešení:

Vytkneme. Pak použijte větu o algebře limit a spojitost logaritmu.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2 + e^{3x})}{\ln(3 + e^{2x})} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln e^{3x} + \ln\left(\frac{2}{e^{3x}} + 1\right)}{\ln e^{2x} + \ln\left(\frac{3}{e^{2x}} + 1\right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \ln\left(\frac{2}{e^{3x}} + 1\right)}{2x + \ln\left(\frac{3}{e^{2x}} + 1\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \ln\left(\frac{2}{e^{3x}} + 1\right)/x}{2 + \ln\left(\frac{3}{e^{2x}} + 1\right)/x} = \frac{3 + 0}{2 + 0} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

(l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x \sin x}}{e^{x^2} - 1}$

Řešení:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x \sin x}}{e^{x^2} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x \sin x}/x^2}{(e^{x^2} - 1)/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x \sin x}}{x^2} =$$

Protože $x \sin x$ je kladný výraz na okolí nuly, též tak x^2 , můžeme doplnit absolutní hodnoty.

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x \sin x|^{1/2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\sin x|^{1/2}}{|x|^{3/2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\sin x|^{1/2}}{|x|^{1/2}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\sin x}{x}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = 1 \cdot +\infty = +\infty. \end{aligned}$$

(m) $\heartsuit \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$, kde $a > 0$.

Řešení:

Substituuje $y = x + 1$ a posléze $y = e^z$. Pak máme

$$\lim_{y \rightarrow 1} \frac{\ln y}{y - 1} = 1 \implies \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{e^z - 1} = 1 \implies \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1.$$

Tím jsme spočítali příklad pro speciální případ, kdy a je rovno Eulerovu číslu e .

Nyní spočteme limitu pro obecné $a > 0$. V závěru substituuje $y = x \ln a$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln a} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln a} - 1}{x \ln a} \cdot \ln a = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} \cdot \ln a = \ln a.$$

$$(n) \heartsuit \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$$

Řešení: Protože $3^x \rightarrow 0$, pokud $x \rightarrow -\infty$, vede k cíli nenápadné rozšíření.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{3^x}}{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+2^x)}{2^x}} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x}{2^x} =$$

Substituce $y = 3^x$ a $z = 2^x$ dává (v kombinaci s faktem, že $\frac{3}{2} > 1$), že $(\frac{3}{2})^x$ klesá v minus nekonečnu k nule

$$= \frac{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1+y)}{y}}{\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\ln(1+z)}{z}} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{1}{1} \cdot 0 = 0.$$

$$(o) \heartsuit \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x})}{\ln(1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})}$$

Řešení:

V čitateli vytkněte \sqrt{x} , dole $\sqrt[3]{x}$ (oba členy s nejvyšší mocninou u x).

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x})}{\ln(1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \sqrt{x} + \ln(x^{-1/2} + 1 + x^{-1/6})}{\ln \sqrt[3]{x} + \ln(x^{-1/3} + 1 + x^{-1/12})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2} \ln x + \ln(x^{-1/2} + 1 + x^{-1/6})}{\frac{1}{3} \ln x + \ln(x^{-1/3} + 1 + x^{-1/12})} = \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2} + \ln(x^{-1/2} + 1 + x^{-1/6})/\ln x}{\frac{1}{3} + \ln(x^{-1/3} + 1 + x^{-1/12})/\ln x} &= \frac{\frac{1}{2} + 0}{\frac{1}{3} + 0} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

$$(p) \heartsuit \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$$

Řešení:

V čitateli i jmenovateli jsou dominantními členy exponenciály. Vytkneme je tedy.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln 3^x(3^{-x} + 1)}{\ln 2^x(2^{-x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln 3^x + \ln(3^{-x} + 1)}{\ln 2^x + \ln(2^{-x} + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln 3 + \ln(3^{-x} + 1)}{x \ln 2 + \ln(2^{-x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln 3 + \ln(3^{-x} + 1)/x}{\ln 2 + \ln(2^{-x} + 1)/x} = \end{aligned}$$

Věta o limitě podílu a o limitě součtu dává (s přihlédnutím k faktu, že $0/\infty = 0$)

$$= \frac{\ln 3 + \ln(0+1)/(+\infty)}{2 + \ln(0+1)/(+\infty)} = \frac{\ln 3}{\ln 2}.$$

Zkouškové příklady

2. Spočítejte limity zadaných funkcí

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - 1}{\log \sqrt{1+x^2}}$$

Řešení:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - 1}{\log \sqrt{1+x^2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - 1}{\sin^2 x} \cdot \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2} - 1} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{\log \sqrt{1+x^2}} \\ &\stackrel{VOAL}{=} -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = -1 \end{aligned}$$

Pro třetí výraz platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(\sqrt{1+x^2} + 1)}{1+x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1+x^2} + 1 = 2$$

Pro VOLSIF máme (ve zkratce) podmínky:

První vnitřní funkce $\sin x \neq 0$ na $P(0, \frac{\pi}{2})$. (Z grafu.)

Druhá vnitřní funkce $\sqrt{1+x^2} \neq 1$ na $P(0, 1)$. Plyne z výpočtu $1+x^2 \neq 1$ na $P(0, 1)$.

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\log\left(1 + \frac{3}{x}\right)} (\log(1+x^3))^2$$

Řešení:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\log\left(1 + \frac{3}{x}\right)} (\log(1+x^3))^2 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\log\left(1 + \frac{3}{x}\right)}{\frac{3}{x}}} \cdot \sqrt{\frac{3}{x}} \cdot (\log(1+x^3))^2 \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\log\left(1 + \frac{3}{x}\right)}{\frac{3}{x}}} \cdot \sqrt{3} \cdot \left(\frac{\log(1+x^3)}{\sqrt[4]{x}}\right)^2 \\ &\stackrel{VOAL}{=} 1 \cdot \sqrt{3} \cdot 0. \end{aligned}$$

Platí

$$0 \leq \left(\frac{\log(1+x^3)}{\sqrt[4]{x}}\right)^2 \leq \left(\frac{\log(2x^3)}{\sqrt[4]{x}}\right)^2 = \left(\frac{\log 2 + \log(x^3)}{\sqrt[4]{x}}\right)^2$$

Pravá strana jde do 0 z aritmetiky limit a ze škály.

Dále máme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\log\left(1 + \frac{3}{x}\right)}{\frac{3}{x}}} = \sqrt{1},$$

z dvojitého použití VOLSIF. Podmínka (P): $\frac{3}{x} \neq 0$ na $P(\infty, 5)$.

Pak podmínka (S): \sqrt{y} je spojitá v 1.

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(\sqrt{e})^{\sin x} - \cos(\sqrt{x})}{\log^2(1 + \sqrt{x})}$$

Řešení:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(\sqrt{e})^{\sin x} - \cos(\sqrt{x})}{\log^2(1 + \sqrt{x})} &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{\frac{1}{2} \sin x} - 1}{\log^2(1 + \sqrt{x})} + \frac{1 - \cos(\sqrt{x})}{\log^2(1 + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{\frac{1}{2} \sin x} - 1}{\frac{1}{2} \sin x} \cdot \frac{\frac{1}{2} \sin x}{x} \cdot \frac{(\sqrt{x})^2}{\log^2(1 + \sqrt{x})} + \frac{1 - \cos(\sqrt{x})}{(\sqrt{x})^2} \cdot \frac{(\sqrt{x})^2}{\log^2(1 + \sqrt{x})} \\ &\stackrel{VOAL}{=} 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

Podmínky pro VOLSF (telegraficky):

- 1) (P) $\frac{1}{2} \sin x \neq 0$ na $P^+(0, \frac{\pi}{2})$ (z grafu).
3,4,5) (P) $\sqrt{x} \neq 0$ na $P^+(0, 3)$ (z grafu).

Bonus

3. Rozhodněte, zda platí

(FALSE) Necht' funkce $f(x)$ není shora omezená v žádném okolí $P(0, \delta)$. Pak $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

Řešení: Uvažujme funkci

$$f(x) = \begin{cases} 1/x, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Pak $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ neexistuje, ale $f(x)$ je neomezená.

(TRUE) Necht' $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$. Pak existuje okolí $P(0, \delta)$ takové, že funkce f je zdola omezená na $P(0, \delta)$.

Řešení: Jde o analogii věty o limitě a omezenosti.

Zvolme $\varepsilon = 1$. Pak existuje $\delta > 0$ tak, že pro $\forall x \in P(0, \delta)$ platí $f(x) \in B(\infty, 1) = (1, \infty)$.

Neboli $f(x) > 1$ na $P(0, \delta)$.

4. Necht' $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jsou funkce. Ukažte, že

$$\max\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2},$$
$$\min\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2}.$$

Řešení:

Rozborem případů. Necht' $f(x) \geq g(x)$. Pak $f(x) - g(x) \geq 0$ a $|f(x) - g(x)| = f(x) - g(x)$. Dostáváme tedy

$$\frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2} = \frac{f(x) + g(x) + f(x) - g(x)}{2} = \frac{2f(x)}{2} = f(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

Analogicky

$$\frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2} = \frac{f(x) + g(x) - f(x) + g(x)}{2} = \frac{2g(x)}{2} = g(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

Pro $f(x) \leq g(x)$ máme $f(x) - g(x) \leq 0$ a $|f(x) - g(x)| = -f(x) + g(x)$ a tedy

$$\frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2} = \frac{f(x) + g(x) - f(x) + g(x)}{2} = \frac{2g(x)}{2} = g(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

Analogicky

$$\frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2} = \frac{f(x) + g(x) + f(x) - g(x)}{2} = \frac{2f(x)}{2} = f(x) = \min\{f(x), g(x)\}.$$