

14. cvičení - odmocniny, VOLSF

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Spočtěte limity

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$

Řešení: Použijeme větu o dvou policajtech. Máme

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}.$$

Protože $\lim_{x \rightarrow \infty} \pm \frac{1}{x} = 0$, tak i

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \cos x$

Řešení: Použijeme větu o dvou policajtech. Máme

$$-e^{-x} \leq e^{-x} \cos x \leq e^{-x}.$$

Protože $\lim_{x \rightarrow \infty} \pm e^{-x} = 0$, tak i

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \cos x = 0.$$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 \sin(x^2)$

Řešení: Použijeme větu o dvou policajtech. Máme

$$-x^3 \leq x^3 \sin x^2 \leq x^3$$

Protože $\lim_{x \rightarrow \infty} \pm x^3 = 0$, tak i

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \sin(x^2) = 0.$$

(d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x - \sin x}$

Řešení: Vytkneme nejrychlejší člen:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{\sin x}{x}}{1 - \frac{\sin x}{x}} \stackrel{VOAL}{=} \frac{1 + 0}{1 - 0} = 1.$$

Limita $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x/x = 0$ podle prvního příkladu.

(e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cos\left(\frac{x+3}{\sqrt{x}-1}\right)$

Řešení: Použijeme větu o dvou policajtech. Máme

$$-x \leq x \cos\left(\frac{x+3}{\sqrt{x}-1}\right) \leq x$$

Protože $\lim_{x \rightarrow \infty} \pm x = 0$, tak i

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cos\left(\frac{x+3}{\sqrt{x}-1}\right) = 0.$$

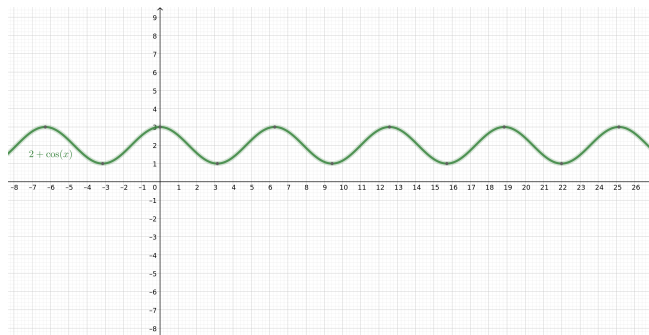
(f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

Řešení: Vytkneme nejrychlejší člen

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}} \stackrel{V_{OAL}}{=} \frac{1+0}{1-0} = 1.$$

(g) $\lim_{x \rightarrow \infty} (2 + \cos x)$

Řešení: Limita neexistuje:



(h) $\lim_{x \rightarrow \infty} x + \sin x$

Řešení: Z jednoho policajta

$$x - 1 \leq x + \sin x$$

Navíc

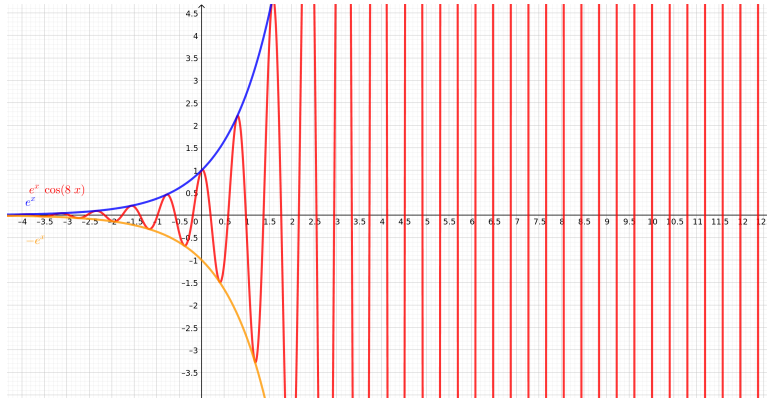
$$\lim_{x \rightarrow \infty} x - 1 = \infty,$$

tedy i

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x + \sin x = \infty.$$

(i) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x \cos x$

Řešení: Limita neexistuje, z grafu (na obr. je kvůli názornosti funkce $e^x \cos(8x)$, ale myšlenka je stejná.)



(j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{e^x}$

Řešení:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{e^x} \stackrel{VOAL}{=} \frac{0}{1} = 0.$$

(k) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sin x}$

Řešení: Limita neexistuje. Funkce $\frac{x}{\sin x}$ není definována v bodech $k\pi$. Což znamená, že pro dané ε nejsme schopni najít žádné δ -okolí bodu ∞ , kde by funkce byla definovaná. Kvůli tomu ovšem nedokážeme ověřit definici limity.

2. Spočítejte limity

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 - x^2 + 3x - 8$

Řešení: Vytkneme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 - x^2 + 3x - 8 = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{8}{x^3} \right) \stackrel{VOAL}{=} \infty(1 - 0 + 0 - 0) = \infty.$$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$

Řešení: Vytkneme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x} \cdot \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{1} \stackrel{VOAL}{=} \frac{1}{1} = 1$$

Limita $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$ se spočítá pomocí limity složené funkce. Vnitřní funkce je $g(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$, vnější $f(y) = \sqrt{y}$. Pro limity platí

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{x^2} = 1 + 0 = 1$$

a

$$\lim_{y \rightarrow 1} \sqrt{y} = \sqrt{1} = 1.$$

Platí podmínka (S): vnější funkce $f(y) = \sqrt{y}$ je spojitá v bodě 1.

(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+2} - \sqrt{x}$

Řešení:

Rozšíříme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+2} - \sqrt{x} \stackrel{VOAL}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2-x}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} \stackrel{VOAL}{=} \frac{2}{\infty + \infty} = 0.$$

Platí, že $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+2} = \infty$ protože $g(x) = x+2$, $f(y) = \sqrt{y}$. Navíc $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty + 2 = \infty$ a $\lim_{y \rightarrow \infty} = \infty$. Platí podmínka (P), protože $x+2 \neq \infty$ na okolí $P(\infty, 1)$.

(d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

Řešení: Vytkneme

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -1 \cdot \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{1} = -1.$$

(e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+2} + \sqrt{x}$

Řešení:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+2} + \sqrt{x} \stackrel{VOAL}{=} \infty + \infty$$

(f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$

Řešení: Rozšíříme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt{x+1}+1)} \stackrel{VOAL}{=} \frac{1}{1+2} = \frac{1}{2}.$$

(g) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x^3 + 8}$

Řešení: Rozšíříme

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x^3 + 8} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-6+2^3}{(\sqrt[3]{(x-6)^2} - 2\sqrt[3]{x-6} + 2^2)(x^3 + 8)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{(\sqrt[3]{(x-6)^2} - 2\sqrt[3]{x-6} + 4)(x+2)(x^2 - 2x + 4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{(\sqrt[3]{(x-6)^2} - 2\sqrt[3]{x-6} + 4)(x^2 - 2x + 4)} \\ &\stackrel{VOAL}{=} \frac{1}{(4+4+4)(4+4+4)} = \frac{1}{144}. \end{aligned}$$

(h) $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2+1} - x)$

Řešení: Rozšíříme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2+1} - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1} \stackrel{VOAL}{=} \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Bonus

3. Spočítejte limity

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + 1}}$$

Řešení:

Vytknutím dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} \sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x}}} = 1.$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x + 1}}$$

Řešení:

Vytknutím dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x + 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} \left(1 + \sqrt[6]{\frac{1}{x}} + \sqrt[4]{\frac{1}{x}}\right)}{\sqrt{x} \sqrt{2 + \frac{1}{x}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1 + 2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$$

Řešení:

Rozšířením dostaneme

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1 + 2x} - 3}{\sqrt{x} - 2} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1 + 2x} - 3}{\sqrt{x} - 2} \cdot \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2} \cdot \frac{\sqrt{1 + 2x} + 3}{\sqrt{1 + 2x} + 3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1 + 2x - 9}{x - 4} \cdot \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{1 + 2x} + 3} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(x - 4)}{x - 4} \cdot \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{1 + 2x} + 3} = \lim_{x \rightarrow 4} 2 \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{1 + 2x} + 3} \\ &= 2 \cdot \frac{2 + 2}{3 + 3} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x - a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}, \text{ kde } a > 0$$

Řešení:

Úpravou dostaneme

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x - a}}{\sqrt{x^2 - a^2}} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\sqrt{x + a}} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x - a}}{\sqrt{x - a}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2a}} \cdot \left[\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt{x - a}} + 1 \right] = \frac{1}{\sqrt{2a}} + \frac{1}{\sqrt{2a}} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt{x - a}} = \frac{1}{\sqrt{2a}}, \end{aligned}$$

neboť

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt{x} - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt{x} - a} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{a}}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{\sqrt{x} - a} \cdot \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x - a}}{1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{0}{1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2a}} = 0.\end{aligned}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right)$$

Řešení:

Počítejme

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sqrt{x + \sqrt{x}} - x}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}} =\end{aligned}$$

vytknutím \sqrt{x} v čitateli i jmenovateli a krácením dostaneme

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^3}}} + 1}} = \frac{1}{2}.$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}} - \sqrt{\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}} \right)$$

Řešení:

Rozšiřujeme.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}} - \left(\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}} \right)}{\sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}} + \sqrt{\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}} + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}} + \sqrt{\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}}} =$$

Vytknutím $\sqrt{1/x}$ v čitateli i jmenovateli a zkrácením dostaneme

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 + \sqrt{x}} + \sqrt{1 + \sqrt{x}}}{\sqrt{1 + \sqrt{x} + \sqrt{x^3}} + \sqrt{1 - \sqrt{x} + \sqrt{x^3}}} = \frac{2}{2} = 1.$$

V příkladu je možné i provést substituci $\frac{1}{x} = y$. Přitom je důležité, že původní limita je jednostranná, totiž že $x \rightarrow 0^+$, a proto $y = \frac{1}{x} \rightarrow +\infty$. Příklad se pak převede na výpočet

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{y + \sqrt{y + \sqrt{y}}} - \sqrt{y - \sqrt{y + \sqrt{y}}} \right)$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/3} \left[(x+1)^{2/3} - (x-1)^{2/3} \right]$$

Řešení:

Rozšířením dostaneme

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/3} [(x+1)^{2/3} - (x-1)^{2/3}] &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/3} \cdot \frac{(x+1)^2 - (x-1)^2}{(x+1)^{4/3} + (x+1)^{2/3}(x-1)^{2/3} + (x-1)^{4/3}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x \cdot x^{1/3}}{(x+1)^{4/3} + (x+1)^{2/3}(x-1)^{2/3} + (x-1)^{4/3}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{4/3} + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2/3} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{2/3} + \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{4/3}} = \frac{4}{1+1+1} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

4. Určete konstanty a a b , jestliže

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 1} - ax - b \right) = 0.$$

Řešení: Počítejme.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 1} - ax - b \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1 - ax^2 - ax - bx - b}{x + 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(1 - a) - x(a + b) - b}{x + 1}. \end{aligned}$$

Limita má být rovna nule. To znamená, že v čitateli musí zmizet člen druhého i prvního řádu, a tedy máme podmínky

$$1 - a = 0, \quad a + b = 0 \quad \implies \quad a = 1, \quad b = -1.$$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x}$, kde $n \in \mathbb{N}$

Řešení: Podle již známého vzorce $(A^k - B^k) = (A - B)(A^{k-1} + A^{k-2}B + \dots + AB^{k-2} + B^{k-1})$ dostaneme

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x} \cdot \frac{\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}} + \sqrt[n]{(1+x)^{n-2}} + \dots + \sqrt[n]{(1+x)} + 1}{\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}} + \sqrt[n]{(1+x)^{n-2}} + \dots + \sqrt[n]{(1+x)} + 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}} + \sqrt[n]{(1+x)^{n-2}} + \dots + \sqrt[n]{(1+x)} + 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}} + \sqrt[n]{(1+x)^{n-2}} + \dots + \sqrt[n]{(1+x)} + 1} = \\ &= \frac{1}{1+1+\dots+1+1} = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

6. Vyšetřete chování kořenů x_1 a x_2 kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, v níž se koeficient a blíží k nule a koeficienty b a c jsou konstantní, přičemž $b \neq 0$.

Řešení: Jde o to vyšetřit limitu

$$x_{1,2} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Chování kořenů je různé. Nechť x_1 je kořen se znaménkem plus u diskriminantu. Potom

$$\lim_{a \rightarrow 0} x_1 = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\sqrt{b^2 - 4ac} - b}{2a} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{(b^2 - 4ac) - b^2}{2a(\sqrt{b^2 - 4ac} + b)} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{-2c}{\sqrt{b^2 - 4ac} + b} = \frac{-2c}{\sqrt{b^2} + b} = -\frac{c}{b}.$$

Nechť nyní x_2 je kořen se znaménkem minus u diskriminantu. Potom

$$\lim_{a \rightarrow 0} x_2 = \lim_{a \rightarrow 0} -\frac{\sqrt{b^2 - 4ac} + b}{2a}.$$

V reálných číslech tato limita neexistuje (to je snadné dokázat, neboť čitatel má pro a dostatečně blízké nule znaménko jako číslo b , zatímco znaménko jmenovatele se mění v závislosti na tom, zda jdeme k nule zprava či zleva).

7. Nechť $a, A \in \mathbb{R}$. Nechť

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x) = A.$$

Rozhodněte, zda je možné, aby pak

- (a) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$,

Řešení: Ano. Např. $f(x) = \frac{1}{(x-a)^2}$, $g(x) = \frac{-1}{(x-a)^2} + a$.

- (b) ani jedna z limit $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ neexistovala,

Řešení: Ano. Např. $f(x) = \frac{1}{(x-a)}$, $g(x) = \frac{-1}{(x-a)} + a$.

- (c) existovala právě jedna z limit $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$.

Řešení: Ne. Předpokládejme, že existuje $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = B \in \mathbb{R}$. Navíc lze psát $g(x) = f(x) + g(x) - f(x)$. Pak z aritmetiky limit máme

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x) - f(x) \stackrel{VOAL}{=} A - B.$$