14. cvičení - odmocniny, VOLSF

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Poznámka 1. Jsou-li funkce f, g spojité v bodě $a \in \mathbb{R}$, pak také funkce $f+g$ a fg jsou spojité v bodě a. Je-li navíc $g(a) \neq 0$, pak také funkce $\frac{f}{g}$ je spojitá v bodě a.

Věta 2 (Policajti pro funkce)**.** 1. Nechť existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall\, x \in \mathcal{P}^\delta(a): \quad f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = A \in \mathbb{R}^*$. Pak

$$\lim_{x\to a} g(x) = A.$$

2. Nechť existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall\, x \in \mathcal{P}^\delta(a): \quad f(x) \leq g(x)$. Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$. Pak

$$\lim_{x\to a} g(x) = \infty.$$

Věta 3 (O limitě složené funkce)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}^*$ a nechť funkce f a g splňují

$$\lim_{x\to a} g(x) = A \in \mathbb{R}^*, \quad \lim_{y\to A} f(y) = B \in \mathbb{R}^*.$$

Je-li navíc splněna alespoň jedna z podmínek

(S) f je spojitá v A;

(P) $\exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{P}^\delta(a): \quad g(x) \neq A$;

pak $\lim_{x\to a} f(g(x)) = B$.

Hinty

$$\begin{aligned}
A^2 - B^2 &= (A-B)(A+B)\\
A^3 - B^3 &= (A-B)(A^2+AB+B^2)\\
A^n - B^n &= (A-B)(A^{n-1}+A^{n-2}B+A^{n-3}B^2+\dots+A^2B^{n-3}+AB^{n-2}+B^{n-1})\\
A^n + B^n &= (A+B)(A^{n-1}-A^{n-2}B+A^{n-3}B^2-\dots+A^2B^{n-3}-AB^{n-2}+B^{n-1}),\ n \text{ liché}
\end{aligned}$$

Příklady

1. Spočtěte limity

(a) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}$

(b) $\lim_{x\to\infty} e^{-x}\cos x$

(c) $\lim_{x\to 0} x^3 \sin(x^2)$

(d) $\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x-\sin x}$

(e) $\lim_{x\to 0+} x \cos\left(\frac{x+3}{\sqrt{x}-1}\right)$

(f) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

(g) $\lim_{x\to\infty} (2+\cos x)$

(h) $\lim_{x\to\infty} x+\sin x$

(i) $\lim\limits_{x\to\infty} e^x \cos x$ (j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{e^x}$ (k) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sin x}$

2. Spočtěte limity

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} x^3 - x^2 + 3x - 8$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x+2} - \sqrt{x}$

(d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

(e) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x+2} + \sqrt{x}$

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

(g) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$

(h) $\lim\limits_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+1} - x)$

Bonus

3. Spočtěte limity

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$

(c) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$

(d) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$, kde $a > 0$

(e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x}\right)$

(f) $\lim\limits_{x\to 0+} \left(\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}}}} - \sqrt{\dfrac{1}{x}-\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}}}}\right)$

(g) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1/3}\left[(x+1)^{2/3} - (x-1)^{2/3}\right]$

4. Určete konstanty a a b, jestliže

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2+1}{x+1} - ax - b\right) = 0.$$

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$, kde $n \in \mathbb{N}$

6. Vyšetřete chování kořenů x_1 a x_2 kvadratické rovnice $ax^2+bx+c=0$, v níž se koeficient a blíží k nule a koeficienty b a c jsou konstantní, přičemž $b \neq 0$.

7. Nechť $a, A \in \mathbb{R}$. Nechť

$$\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = A.$$

Rozhodněte, zda je možné, aby pak

(a) $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$,

(b) ani jedna z limit $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{x\to a} g(x)$ neexistovala,

(c) existovala právě jedna z limit $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{x\to a} g(x)$.