12. cvičení - celá část

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Spočtěte limity s celou částí

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}}$

   Řešení: Použijeme odhady

$$\sqrt{n}-1 < \lfloor \sqrt{n} \rfloor \leq \sqrt{n}$$

   Platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}{1} = 1$$

   a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = 1.$$

   Ze dvou policajtů pak i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}} = 1.$$

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left[\frac{1+\sqrt{n}}{2}\right] + \left[\frac{n}{2}\right]}{n}$

   Řešení: Odhadneme

$$\frac{\frac{1+\sqrt{n}}{2} - 1 + \frac{n}{2} - 1}{n} \leq \frac{\left[\frac{1+\sqrt{n}}{2}\right] + \left[\frac{n}{2}\right]}{n} \leq \frac{\frac{1+\sqrt{n}}{2} + \frac{n}{2}}{n}$$

   Limity:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1+\sqrt{n}}{2} - 1 + \frac{n}{2} - 1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(\frac{\sqrt{n}}{n} - \frac{3}{n} + 1\right)}{2n} = \frac{1}{2}$$

   a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1+\sqrt{n}}{2} + \frac{n}{2}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(\frac{1}{n} + \frac{\sqrt{n}}{n} + 1\right)}{2n} = \frac{1}{2}.$$

   Ze dcou policajtů máme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left[\frac{1+\sqrt{n}}{2}\right] + \left[\frac{n}{2}\right]}{n} = \frac{1}{2}.$$

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\log n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$

   Řešení: Máme odhad

$$2\log n = \frac{n\log n}{\frac{n}{2}} \leq \frac{n\log n}{\left[\frac{n}{2}\right]}.$$

   Protože $\lim_{n\to\infty} 2\log n = \infty$, tak i $\lim_{n\to\infty} \leq \frac{n\log n}{\left[\frac{n}{2}\right]} = \infty$ z věty o uspořádání.

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3 - \left[\frac{n^3}{100}\right]\cdot 100}{\sqrt{n}}$

Řešení: (příklad převzat z `https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf`)

Odhadneme

$$0 = \frac{n^3 - \frac{n^3}{100}\cdot 100}{\sqrt{n}} \le \frac{n^3 - \left[\frac{n^3}{100}\right]\cdot 100}{\sqrt{n}} \le \frac{n^3 - \left(\frac{n^3}{100}-1\right)\cdot 100}{\sqrt{n}} = \frac{100}{\sqrt{n}}$$

Protože i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{100}{\sqrt{n}} = 0,$$

tak ze dvou policajtů je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 - \left[\frac{n^3}{100}\right]\cdot 100}{\sqrt{n}} = 0.$$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt[3]{n^3+8n^2} - \sqrt[3]{n^3+2n^2}\right]$

Řešení: (příklad převzat z `https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf`)

Výraz $a_n = \sqrt[3]{n^3+8n^2} - \sqrt[3]{n^3+2n^2}$ lze upravit na

$$\frac{6n^2}{(n^3+8n^2)^{2/3} + (n^3+8n^2)^{1/3}(n^3+2n^2)^{1/3} + (n^3+2n^2)^{2/3}}$$
$$= \frac{6}{\left(1+\frac{8}{n}\right)^{2/3} + \left(1+\frac{8}{n}\right)^{1/3}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{1/3} + \left(1+\frac{2}{n}\right)^{2/3}}$$

Limita:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6}{\left(1+\frac{8}{n}\right)^{2/3} + \left(1+\frac{8}{n}\right)^{1/3}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{1/3} + \left(1+\frac{2}{n}\right)^{2/3}} = 2$$

Protože limita je rovna 2, tak od jistého n_0 máme $a_n \ge 1$.

Protože máme nerovnost

$$3 < \left(1+\frac{8}{n}\right)^{2/3} + \left(1+\frac{8}{n}\right)^{1/3}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{1/3} + \left(1+\frac{2}{n}\right)^{2/3}$$

tak dále platí, že

$$a_n < \frac{6}{3} = 2.$$

Dohromady

$$\lim_{n\to\infty} [a_n] = 1.$$

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt[3]{n^3+8n^2} - \sqrt[3]{n^3+2n^2}\right] \cdot \dfrac{(n^2+n+1)^{10} - (n+1)^{20}}{(n^2+1)^{10} - (n+1)^{20}}$

Řešení:

Prve spočteme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+n+1)^{10}-(n+1)^{20}}{(n^2+1)^{10}-(n+1)^{20}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n^{20}+10n^{19}+55n^{18}+\cdots+1)-(n^{20}+20n^{19}+190n^{18}+\cdots 1)}{(n^{20}+10n^{18}+\cdots+1)-(n^{20}+20n^{19}+190n^{18}+\cdots 1)}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{19}}{n^{19}} \cdot \frac{\left(10+\frac{55}{n}+\cdot\frac{1}{n^{19}}\right)-\left(20+\frac{190}{n}+\cdot\frac{1}{n^{19}}\right)}{\left(\frac{10}{n}+\cdots\frac{1}{n^{19}}\right)-\left(20+\frac{190}{n}+\cdots\frac{1}{n^{19}}\right)} = \frac{-10}{-20} = -\frac{1}{2}.$$

Pomocí předchozího příkladu a aritmetiky limit dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \left[\sqrt[3]{n^3+8n^2}-\sqrt[3]{n^3+2n^2}\right] \cdot \frac{(n^2+n+1)^{10}-(n+1)^{20}}{(n^2+1)^{10}-(n+1)^{20}} = 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}.$$

(g) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\left[\sqrt{n^3+1}\right]+\left[\sqrt{n^3-1}\right]}{\sqrt[n]{1^n+2^n+\cdots n^n}}$

Řešení: (příklad převzat z https://reseneulohy.cz/cs/matematika/matematicka-analyza)

Prve odhadneme

$$\left[\sqrt{n^3+1}\right]+\left[\sqrt{n^3-1}\right] \geq \sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3-1}-2 \geq \sqrt{n^3+1}-2 \geq \sqrt{n^3}-2$$

a

$$\sqrt[n]{1^n+2^n+\cdots n^n} \leq \sqrt[n]{n^n+n^n+\cdots n^n} = n\sqrt[n]{n}$$

Dohromady máme

$$\frac{\left[\sqrt{n^3+1}\right]+\left[\sqrt{n^3-1}\right]}{\sqrt[n]{1^n+2^n+\cdots n^n}} \geq \frac{\sqrt{n^3}-2}{n\sqrt[n]{n}}$$

Navíc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3}-2}{n\sqrt[n]{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}-\frac{2}{n}}{\sqrt[n]{n}} = \infty.$$

Tedy z věty o uspořádání je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left[\sqrt{n^3+1}\right]+\left[\sqrt{n^3-1}\right]}{\sqrt[n]{1^n+2^n+\cdots n^n}} = \infty$$

(h) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left[\sqrt[4]{n^4+4n^3}-n\right]$

Řešení: (příklad převzat z https://reseneulohy.cz/cs/matematika/matematicka-analyza)

Prve rozšíříme podle vzorce

$$a_n = \sqrt[4]{n^4+4n^3}-n = \frac{4n^3}{\sqrt[4]{(n^4+4n^3)^3}+n\sqrt[4]{(n^4+4n^3)^2}+n^2\sqrt[4]{(n^4+4n^3)}+n^3}$$
$$= \frac{4}{\sqrt[4]{\left(1+\frac{4}{n}\right)^3}+\sqrt[4]{\left(1+\frac{4}{n}\right)^2}+\sqrt[4]{\left(1+\frac{4}{n}\right)}+1}$$

Limita bez celé části $\lim_{n\to\infty} a_n = -/4 = 1$.
Zároveň máme odhady

$$0 < \frac{4}{\sqrt[4]{\left(1+\frac{4}{n}\right)^3} + \sqrt[4]{\left(1+\frac{4}{n}\right)^2} + \sqrt[4]{\left(1+\frac{4}{n}\right)} + 1} < 1$$

Celkem tedy

$$\lim_{n\to\infty} \left[\sqrt[4]{n^4+4n^3} - n\right] = 0$$

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sqrt{n}\,\sqrt[n]{(n+1)^n + n^{n+1}}}{[\sqrt{n}] + [2\sqrt{n}] + \cdots + [n\sqrt{n}]}$

Řešení: (příklad převzat z https://reseneulohy.cz/cs/matematika/matematicka-analyza)

Prve odhadneme

$$[\sqrt{n}]+[2\sqrt{n}]+\cdots+[n\sqrt{n}] \geq \sqrt{n}-1+2\sqrt{n}-1+\cdots-1+n\sqrt{n}-1 = \sqrt{n}\frac{n(n+1)}{2} - n$$

a

$$[\sqrt{n}] + [2\sqrt{n}] + \cdots + [n\sqrt{n}] \leq \sqrt{n} + 2\sqrt{n} + \cdots + n\sqrt{n} = \sqrt{n}\frac{n(n+1)}{2}.$$

Dohromady

$$\frac{n\sqrt{n}\,\sqrt[n]{(n+1)^n+n^{n+1}}}{\sqrt{n}\frac{n(n+1)}{2}} \leq \frac{n\sqrt{n}\,\sqrt[n]{(n+1)^n+n^{n+1}}}{[\sqrt{n}]+[2\sqrt{n}]+\cdots+[n\sqrt{n}]} \leq \frac{n\sqrt{n}\,\sqrt[n]{(n+1)^n+n^{n+1}}}{\sqrt{n}\frac{n(n+1)}{2} - n}$$

Spočteme limity

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n}\,\sqrt[n]{(n+1)^n+n^{n+1}}}{\sqrt{n}\frac{n(n+1)}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt[n]{(n+1)^n+n^{n+1}}}{(n+1)} = \lim_{n\to\infty} 2\sqrt[n]{\frac{(n+1)^n+n^{n+1}}{(n+1)^n}}$$
$$= 2\sqrt[n]{1+n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n}$$

Aplikujeme dva policajty:

$$2\sqrt[n]{1+n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n} \leq 2\sqrt[n]{1+n} \leq 2\sqrt[n]{2n} \to 2\cdot 1,$$

z druhé strany

$$2\sqrt[n]{1+n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n} \geq 2\sqrt[n]{1} \to 2\cdot 1.$$

Tedy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n}\,\sqrt[n]{(n+1)^n+n^{n+1}}}{\sqrt{n}\frac{n(n+1)}{2}} = 2.$$

Limitu horního policajta spočteme jako

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n}\sqrt[n]{(n+1)^n+n^{n+1}}}{\sqrt{n}\frac{n(n+1)}{2}-n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n}\sqrt[n]{(n+1)^n+n^{n+1}}}{\sqrt{n}\frac{n(n+1)}{2}} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{2}{\sqrt{n}(n+1)}\right)} \overset{VOAL}{=} 2\times 1.$$

Závěr: ze dvou policajtů

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n}\sqrt[n]{(n+1)^n+n^{n+1}}}{[\sqrt{n}]+[2\sqrt{n}]+\cdots+[n\sqrt{n}]} = 2$$

(j) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}[kx]$

Řešení: Zřejmě platí, že $kx-1 \le [kx] \le kx$, a protože

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(kx-1) &= \frac{1}{n^2}\left(x(1+\ldots+n)-(1+\ldots+1)\right)\\ &= \frac{1}{n^2}\left(x\frac{n(n+1)}{2}-n\right) = x\frac{n(n+1)}{2n^2}-\frac{1}{n} \xrightarrow{n\to+\infty} \frac{x}{2}\end{aligned}$$

a

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(kx) = \frac{1}{n^2}\left(x(1+\ldots+n)\right) = \frac{1}{n^2}\left(x\frac{n(n+1)}{2}\right) = x\frac{n(n+1)}{2n^2} \xrightarrow{n\to+\infty} \frac{x}{2},$$

je hledaná limita rovna $x/2$ podle věty o sevření.

Teorie

2. Buď dáno $x \in \mathbb{R}$. Označme $[x]$ celou část čísla x a $\{x\} = x - [x]$ desetinný rozvoj čísla x. (Například $\{\pi\} = 0,1415926\ldots$.) Sestrojme posloupnost

$$\{x\},\ \{2x\},\ \{3x\},\ \ldots,\ \{nx\},\ \ldots$$

Dokažte, že:

a) Je-li x celé, má posloupnost limitu 0.

b) Je-li x racionální necelé, tj. $x = r/s$, má posloupnost hromadné body $0, \frac{1}{s}, \frac{2}{s}, \ldots, \frac{s-1}{s}$.

c) Je-li x iracionální, vyplňují hromadné body posloupnosti celý interval $[0,1]$.

Řešení:

a) Posloupnost je konstantní, neboť pro libovolné celé x je nx celé číslo a tedy $\{kx\} = 0$.

b) Předpokládáme samozřejmě, že r, s jsou nesoudělná. Proto není možné, aby kterékoli z čísel $\frac{r}{s}, \frac{2r}{s}, \ldots, \frac{(s-1)r}{s}$ bylo celé. Dokonce ani není možné, abychom po dělení s dostali stejný zbytek; kdyby tomu tak u dvou čísel bylo, byl by dělitelný jejich rozdíl. To ale není možné, došlo by ke sporu s nesoudělností.

Zbytek je jednoduchý, neboť pro jakékoli celé k je $\{n\frac{r}{s}\} = \{(n+ks)\frac{r}{s}\}$, a tedy posloupnost obsahuje nekonečně členů rovných kterémukoli z „hromadných bodů“.

c) Nechť a je libovolné číslo z intervalu $[0, 1]$ a volme $0 < \varepsilon < 1$. Stačí ukázat, že pro takto libovolně zvolené ε existuje člen posloupnosti $\{n\theta\}$, který se od a liší méně než o ε.

Podle následujícího příkladu lze nalézt přirozená čísla q, p tak, že $|q\theta - p| = \varepsilon_1 < \varepsilon$, přičemž $\varepsilon_1 > 0$, neboť θ není racionální. Mohou nastat dva případy:

1. $q\theta - p = \varepsilon_1$. Potom $\{q\theta\} = \varepsilon_1$. Dále $\{2q\theta\} = 2\varepsilon_1$ až po nějaké číslo $\{kq\theta\} = k\varepsilon_1$, kde k je maximální takové, aby $k\varepsilon_1 < 1$. Konečná posloupnost zbytků $\varepsilon_1, 2\varepsilon_1, \ldots, k\varepsilon_1$ dělí interval $(0, 1)$ na podintervalky délky ε_1 a číslo a do některého musí spadnout. Za vhodné n pak stačí vzít takové, aby $n\varepsilon_1$ byl hraniční bod intervalku, do něhož číslo a spadne. Potom je zřejmě $|\{nq\theta\} - a| \leq \varepsilon_1 < \varepsilon$.

2. Postup je podobný, jenom s přihlédnutím k tomu, že $q\theta - p = -\varepsilon_1$, a proto je $\{q\theta\} = 1 - \varepsilon_1$, $\{2q\theta\} = 1 - 2\varepsilon_1$ dtto. Tak se opět interval $(0, 1)$ rozseká na malé kousky atd.

Pomocný příklad. a) Nechť $\theta \in \mathbb{R}$ a $t \in \mathbb{N}$. Potom existují celá čísla p_t, q_t tak, že $|q_t\theta - p_t| < \frac{1}{t}$. Přitom $0 < q \leq t$. Dokažte.

b) Jestliže θ je iracionální, je $\lim\limits_{t\to\infty} q_t = +\infty$.

Návod: a) Ke každému číslu $k = 0, 1, \ldots, t$ najděme celé číslo r_k tak, že $0 \leq k\theta - r_k < 1$ (tzn. $r_k = [k\theta]$, kde $[\cdot]$ značí celou část čísla uvnitř). Interval $[0, 1]$ rozdělíme na t intervalů

$$I_1 = \left[0, \frac{1}{t}\right), \ I_2 = \left[\frac{1}{t}, \frac{2}{t}\right), \ldots, \ I_t = \left[\frac{t-1}{t}, \frac{t}{t}\right).$$

Položme $x_k = k\theta - r_k$ pro $k = 0, 1, \ldots, t$. Všech čísel x_k je celkem $t + 1$, a proto v některém z intervalů výše leží alespoň dvě z nich, označme je x_{k_1}, x_{k_2}, kde $k_1 < k_2$. Odtud plyne, že číslo $|x_{k_2} - x_{k_1}|$ leží v intervalu $[0, \frac{1}{t})$. Proto

$$0 \leq |x_{k_2} - x_{k_1}| = |(k_2 - k_1)\theta - (r_{k_2} - r_{k_1})| < \frac{1}{t}$$

a stačí položit $q = k_2 - k_1$ a $p = r_{k_2} - r_{k_1}$. Zbývá ukázat, že $0 < q \leq t$. Ale to je zřejmé, protože $k_2 > k_1$ a zároveň obě k nabývají hodnot menších než t.

b) Čísla q_t jsou přirozená. Pokud by posloupnost nekonvergovala do nekonečna, muselo by existovat nekonečně mnoho přirozených čísel $t_1 < t_2 < t_3 < \ldots$, kterým by příslušelo totéž q a tím pádem nutně také totéž p. Pak by bylo

$$|q\theta - p| < \frac{1}{t_n} \implies 0 \leq |q\theta - p| \leq \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t_n} = 0 \implies q\theta - p = 0 \implies \theta = \frac{p}{q},$$

což je spor s iracionalitou čísla θ.