Tento vztah nám ukazuje, že čitatel zlomku (samozřejmě druhým zlomkem počínaje) se zkrátí se jmenovatelem zlomku následujícího (pokud za ním ovšem ten následující je). Uvažovaný výraz se pak podstatně zjednoduší a bude mít tvar

$$\frac{1 \cdot 2}{n(n+1)} \cdot \frac{n^2+n+1}{2^2-2+1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{n^2+n+1}{n^2+n}.$$

Takto dostáváme

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^3-1}{2^3+1} \cdot \frac{3^3-1}{3^3+1} \cdots \frac{n^3-1}{n^3+1}\right) = \frac{2}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n+1}{n^2+n} = \frac{2}{3}.$$

▲

Příklad 1.12. Určete $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3+6k^2+11k+5}{(k+3)!}$.

Řešení. Zde můžeme být na značných rozpacích, jak postupovat. Ale v čitateli je mnohočlen a mnohočleny často umíme rozložit. Jistě by bylo příjemné, kdyby se některý činitel v rozkladu mnohočlenu $k^3+6k^2+11k+5$ zkrátil proti $(k+1)!$. Zkusíme tedy např. zda $k+1$ nedělí uvažovaný mnohočlen. Bohužel však zjistíme, že v bodě $k=-1$ má mnohočlen hodnotu -1. Tedy $k+1$ náš mnohočlen nedělí, ale z našeho výsledku plyne, že $k+1$ dělí mnohočlen $(k^3+6k^2+11k+5)+1$. Odtud je pak již jen krůček ke zjištění, že

$$k^3+6k^2+11k+5 = (k+1)(k+2)(k+3)-1.$$

S použitím tohoto výsledku dostáváme

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3+6k^2+11k+5}{(k+3)!} = \sum_{k=1}^{n}\frac{(k+1)(k+2)(k+3)-1}{(k+3)!} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+3)!} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} - \sum_{k=4}^{n+3}\frac{1}{k!} =$$
$$= \frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}-\frac{1}{(n+3)!}.$$

Odtud

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3+6k^2+11k+5}{(k+3)!} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}-\frac{1}{(n+3)!}\right) =$$
$$= \frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!} = \frac{5}{3}.$$

▲

1a

Příklad 1.13. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je dána předpisem $a_1 = 0$, $a_n = \dfrac{a_{n-1}+3}{4}$ pro $n \geq 2$. Určete $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$.

Řešení. V tomto příkladě je posloupnost definována pomocí rekurentní formule. Vypočteme-li první tři členy, zjistíme, že

$$a_1 = 0 < a_2 = \frac{3}{4} < a_3 = \frac{15}{16}.$$

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, alespoň na svém začátku, působí dojmem, že by mohla být rostoucí a shora omezená číslem 1. Zkusme tedy tato tvrzení dokázat. Zřejmě $a_1 < a_2$. Předpokládejme tedy, že $a_k < a_{k+1}$ pro všechna $k = 1, 2, \ldots .n - 1$. Upravujeme-li nerovnost, jejíž platnost ovšem chceme teprve dokázat, dostáváme

$$\begin{aligned} a_n &< a_{n+1}, \\ \frac{a_{n-1} + 3}{4} &< \frac{a_n + 3}{4}, \\ a_{n-1} + 3 &< a_n + 3, \\ a_{n-1} &< a_n, \end{aligned}$$

přičemž poslední nerovnost podle indukčního předpokladu platí. Předchozí postup ovšem nemůžeme považovat za důkaz, spíše za návod k důkazu. Formální důkaz by postupoval přesně opačným směrem. Podle indukčního předpokladu platí $a_{n-1} < a_n$. Odtud úpravami dostáváme

$$\begin{aligned} a_{n-1} + 3 &< a_n + 3, \\ \frac{a_{n-1} + 3}{4} &< \frac{a_n + 3}{4}, \\ a_n &< a_{n+1}. \end{aligned}$$

Tím je tedy dokázáno, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí. Ukážeme nyní, že $a_n < 1$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Zřejmě $a_1 < 1$. Předpokládejme, že $a_k < 1$ pro $k = 1, 2, \ldots, n - 1$. Potom

$$a_n = \frac{a_{n-1} + 3}{4} < \frac{1 + 3}{4} = 1,$$

čímž je omezenost posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dokázána. Podle Věty 1.9 má tedy posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vlastní limitu. Označíme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. V rovnosti $a_n = \frac{a_{n-1}+3}{4}$ pišme $n + 1$ místo n. Dostáváme rovnost

$$a_{n+1} = \frac{a_n + 3}{4},$$

která platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Přechodem k limitě na obou stranách této rovnosti dostáváme

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_{n+1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_n + 3}{4}, \\ a &= \frac{1}{4}(\lim_{n\to\infty} a_n + 3), \\ a &= \frac{1}{4}(a + 3), \\ &\boxed{a = 1.} \end{aligned}$$

Připomeňme, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a$ na základě Věty 1.12, protože posloupnost $\{a_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ je vybraná z $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Ukázali jsme tedy, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

Ukažme si ale ještě, než ukončíme tento příklad, jak jinak můžeme dospět k přesvědčení, že číslo 1 by mohlo být horní hranicí posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Postup, který ukážeme, se nám může hodit i leckdy jindy. K přesvědčení, že $a_n < 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ jsme původně dospěli odhadem. Pak jsme ovšem tuto nerovnost dokázali. Můžeme však postupovat i takto: Chceme-li dokázat, že $a_n < c$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ (c ovšem zatím neznáme), bylo by dobré, kdybychom byli schopni dokázat, že $a_n < c$ implikuje $a_{n+1} < c$:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + 3}{4} < \frac{c + 3}{4}.$$

Kdyby nyní platilo $\frac{c+3}{4} = c$, byl by náš důkaz hotov. Z této rovnice ale ihned dostáváme $c = 1$.

Můžeme ale nabídnout ještě další postup pro určení kandidáta na horní hranici posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. V okamžiku, kdy už víme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí, můžeme uvažovat následujícím způsobem: Horní hranicí rostoucí konvergentní posloupnosti je její limita. Má-li posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vlastní limitu, označme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Přechodem k limitě v rovnosti $a_{n+1} = \frac{a_n+3}{4}$ úplně stejně jako výše zjistíme, že $a = 1$. Takže, má-li posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vůbec horní hranici, potom číslo $a = 1$ je její horní hranicí. ▲

1c

Příklad 1.14. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je dána předpisem $a_1 > 0$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\Big(a_n + \dfrac{1}{a_n}\Big)$. Určete $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Řešení. Jedná se opět o posloupnost definovanou rekurentně, takže zkusíme stejný postup jako v Příkladě 1.13. Je-li posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vůbec monotonní, zjistíme téměř jistě druh monotonnosti srovnáním prvních dvou členů a_1 a $a_2 = \frac{1}{2}\big(a_1 + \frac{1}{a_1}\big)$. (Nic nezjistíme pouze v případě $a_1 = a_2$.) Vyšetřujme tedy např. nerovnost

$$\begin{aligned} a_1 &< a_2, & a_1 &< \frac{1}{a_1},\\ a_1 &< \frac{1}{2}\Big(a_1 + \frac{1}{a_1}\Big), & a_1^2 &< 1,\\ 2a_1 &< a_1 + \frac{1}{a_1}, & a_1 &< 1. \end{aligned}$$

Zdá se tedy, že pro $a_1 < 1$ by naše posloupnost mohla být neklesající a pro $a_1 > 1$ nerostoucí. Každopádně je ale jasné, že pro $a_1 = 1$ je konstantní, přesněji $a_n = 1$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Předchozí domněnka o monotonnosti je však velký omyl, který nám ukazuje, jak opatrní při matematických soudech musíme být. Jak ale zjistíme, že se jedná o omyl, a jak nalezneme správnou odpověď? Pokračujeme-li v našich předchozích úvahách, je přirozené snažit se v případě $a_1 < 1$ dokázat, že naše posloupnost je neklesající. Vyšetřujme proto nerovnost $a_n \le a_{n+1}$:

$$\begin{aligned} a_n &\le a_{n+1},\\ a_n &\le \frac{1}{2}\Big(a_n + \frac{1}{a_n}\Big),\\ a_n &\le \frac{1}{a_n},\\ a_n &\le 1. \end{aligned}$$

(Při násobení číslem a_n nedojde k obrácení nerovnosti, neboť jak se snadno dokáže indukcí $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost s kladnými členy.) Jistě by tedy bylo dobré dokázat, že $a_n \le 1$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pro $n \ge 2$ zde dostáváme

$$\begin{aligned} a_n &\le 1,\\ \frac{1}{2}\Big(a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}}\Big) &\le 1,\\ a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}} &\le 2,\\ a_{n-1}^2 + 1 &\le 2a_{n-1},\\ (a_{n-1} - 1)^2 &\le 0, \end{aligned}$$

Příklady

1. Spočtěte limitu rekurentně zadané posloupnosti

   (b) $x_1 = \sqrt{2}$, $x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}$

   Řešení: Pro n-tý člen máme vzorec

$$x_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ odmocnin}}.$$

Posloupnost x_n je zřejmě ostře rostoucí, neboť nerovnost $x_{n+1} > x_n$ se lehce ověří (např. umocněním). Dokážeme, že $x_n \leq 2$ pro libovolné n; umocňováním na druhou totiž postupně dostáváme

$$x_n \leq 2 \Leftrightarrow \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ odmocnin}} \leq 2 \Leftrightarrow 2 + \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n-1 \text{ odmocnin}} \leq 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n-1 \text{ odmocnin}} \leq 2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \sqrt{2} \leq 2.$$

Protože posloupnost je monotónní a omezená, konverguje, tj. má vlastní limitu L. Tuto limitu lze nyní navíc snadno spočítat, neboť

$$\lim x_{n+1} = \lim \sqrt{2 + x_n}$$

$$L = \sqrt{2 + L}$$

$$L = 2.$$

Nyní předpokládejme, že $\{a_n\}$ je shora omezená, tedy $\sup\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$. Zvolíme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, a označíme $A = \sup\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Z definice suprema plyne, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n_0} > A - \varepsilon$. Protože však $\{a_n\}$ je neklesající, je $A - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Nerovnost $a_n < A + \varepsilon$ platí dokonce pro všechna $n \in \mathbb{N}$, neboť A je horní závorou množiny všech členů posloupnosti $\{a_n\}$. Ke zvolenému ε jsme tedy nalezli $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\colon\ A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon.$$

To podle definice limity znamená, že $\lim a_n = A$.

Nyní předpokládejme, že $\{a_n\}$ je nerostoucí. Pak lze tvrzení dokázat obdobně, můžeme ale také postupovat následujícím způsobem. Snadno nahlédneme, že posloupnost $\{-a_n\}$ je neklesající. Podle již dokázané části věty je tedy $\lim(-a_n) = \sup\{-a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Podle Věty 1.5.15 odtud plyne, že $\lim(-a_n) = -\inf\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Konečně podle věty o limitě součinu (Věta 2.3.27(b)) dostáváme

$$\lim a_n = \lim(-1)(-a_n) = -\lim(-a_n) = \inf\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}.$$

■

2.4.2. Důsledek. Každá neklesající shora omezená posloupnost je konvergentní. Podobně každá nerostoucí zdola omezená posloupnost je konvergentní.

Důkaz. Nechť $\{a_n\}$ je neklesající shora omezená posloupnost reálných čísel. Z Věty 2.4.1 vyplývá, že $\lim a_n = \sup\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Z omezenosti posloupnosti shora dále plyne, že $\sup\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$. Posloupnost $\{a_n\}$ je tedy konvergentní. Je-li posloupnost $\{a_n\}$ nerostoucí a zdola omezená, pak lze důkaz provést obdobně. ■

Věta 2.4.1 umožňuje ověřit existenci limity posloupnosti, aniž by bylo nutné ji explicitně vypočítat. V některých případech je ale informace o existenci limity nezbytnou součástí jejího výpočtu. Tento jev ilustruje následující příklad.

2.4.3. Příklad. Nechť $c \in \mathbb{R}$, $c \geq 0$. Spočtěte limitu posloupnosti $\{a_n\}$, která je zadána následujícím způsobem:

$$a_1 = \sqrt{c}, \qquad a_{n+1} = \sqrt{a_n + c} \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}. \tag{2.18}$$

Řešení. Nejprve si uvědomíme, že posloupnost $\{a_n\}$ je dobře definovaná. První člen je definován explicitně a je nezáporný. Předpokládáme-li, že a_n je definováno a je nezáporné, pak je definováno i a_{n+1} a je nezáporné. Podle principu matematické indukce je pak posloupnost $\{a_n\}$ definovaná a její členy jsou nezáporné.

Je-li $c = 0$, pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n = 0$, a tedy $\lim a_n = 0$.

Předpokládejme tedy, že $c > 0$. Nejprve dokážeme, že posloupnost $\{a_n\}$ je monotónní. Zřejmě platí $a_1 < a_2$. Jestliže pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n-1} < a_n$, pak

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} + c} < \sqrt{a_n + c} = a_{n+1}.$$

Podle principu matematické indukce je tedy posloupnost $\{a_n\}$ rostoucí.

Nyní dokážeme, že posloupnost $\{a_n\}$ je shora omezená. Zřejmě platí $a_1 < \sqrt{c}+1$. Předpokládejme, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n < \sqrt{c} + 1$. Potom

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sqrt{a_n + c} < \sqrt{\sqrt{c} + 1 + c} < \sqrt{c + 2\sqrt{c} + 1} \\ &= \sqrt{(\sqrt{c} + 1)^2} = \sqrt{c} + 1. \end{aligned}$$

Z principu matematické indukce tedy plyne, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $a_n < \sqrt{c} + 1$, takže $\{a_n\}$ je shora omezená. Ověřili jsme, že posloupnost $\{a_n\}$ splňuje předpoklady věty o limitě monotónní posloupnosti (Věta 2.4.1). Podle této věty má tedy posloupnost $\{a_n\}$ vlastní limitu. Označme ji symbolem A.

Posledním krokem řešení bude výpočet hodnoty A. Z (2.18) plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n+1}^2 = a_n + c$. Z věty o limitě vybrané posloupnosti (Věta 2.2.32) odvodíme, že také $\lim a_{n+1} = A$, a z věty o aritmetice limit (Věta 2.3.27) dostaneme vztahy $\lim a_{n+1}^2 = A^2$ a $\lim(a_n + c) = A + c$. Získali jsme kvadratickou rovnici $A^2 = A + c$ pro neznámou hodnotu A, o které zatím víme jen, že existuje. Výpočtem zjistíme, že A je rovno buď $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4c})$ nebo $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 + 4c})$. Hodnota $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 + 4c})$ však nemůže být limitou posloupnosti $\{a_n\}$, protože je to záporné číslo a všechny prvky posloupnosti $\{a_n\}$ jsou nezáporné. To by bylo ve sporu s Větou 2.2.44(b) (do níž bychom dosadili $B = 0$ a $b_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$). Odtud vyplývá, že $\lim a_n = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4c})$. ♣

2.4.4. Důležitou součástí řešení předcházejícího příkladu bylo ověření existence limity posloupnosti $\{a_n\}$. Bez tohoto kroku by bylo řešení neúplné. Uvažujme posloupnost $\{b_n\}$ definovanou rekurentně předpisem

$$b_1 = -1, \quad b_{n+1} = -b_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Za předpokladu, že $\lim b_n$ existuje a je rovna prvku $A \in \mathbb{R}^*$, bychom podobně jako v řešení Příkladu 2.4.3 odvodili, že $A = -A$, a tedy $A = 0$. Limita posloupnosti $\{b_n\}$ ale není rovna 0, neboť $b_n = (-1)^n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, jak lze snadno ověřit.

2.4.5. Příklad. Pro $n \in \mathbb{N}$ definujeme

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Dokažte, že posloupnost $\{a_n\}$ je rostoucí a shora omezená a posloupnost $\{b_n\}$ je klesající a zdola omezená, a tedy jsou obě posloupnosti konvergentní, a že navíc platí $\lim a_n = \lim b_n$.

Řešení. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Potom z Bernoulliovy nerovnosti (Příklad 1.8.10) plyne odhad

$$\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} > 1 + \frac{1}{n}.$$

Algebraickými úpravami odtud odvodíme nerovnost

$$\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+2} > \frac{n+1}{n},$$

Podle Příkladu 2.5.4 a Věty 2.2.36 platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{(n-1)!} = \lim_{n\to\infty} 2\frac{2^{n-1}}{(n-1)!} = 2\cdot 0 = 0.$$

Tedy opět podle Věty 2.3.27 dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2\cdot n!}{(n-1)!+2^n} + n\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2}{1+\frac{2^n}{(n-1)!}} + 1\right) = \infty$$

a

$$\lim_{n\to\infty} \left(-\frac{2\cdot n!}{(n-1)!+2^n} + n\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(-\frac{2}{1+\frac{2^n}{(n-1)!}} + 1\right) = -\infty.$$

Protože

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & n \in \{2k;\ k \in \mathbb{N}\}, \\ 1, & n \in \{4k+1;\ k \in \mathbb{N}\}, \\ -1, & n \in \{4k-1;\ k \in \mathbb{N}\}, \end{cases}$$

dostáváme celkem

$$\lim_{k\to\infty} a_{4k+1} = \infty \quad \text{a} \quad \lim_{k\to\infty} a_{4k-1} = -\infty,$$

a tedy podle Věty 2.3.22 $\lim a_n$ neexistuje. ♣

2.6.20. Příklad. Zjistěte, zda posloupnost $\left\{\frac{(-1)^n+2}{2^n(3-(-1)^n)}\right\}$ má limitu. Pokud ano, vypočtěte ji.

Řešení. Zadaná posloupnost je součinem posloupností $\left\{\frac{(-1)^n+2}{3-(-1)^n}\right\}$ a $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$. První z nich je omezená, neboť každý její člen je roven buď $\frac{1}{4}$ nebo $\frac{3}{2}$. Druhá posloupnost má limitu rovnou 0. Podle Věty 2.2.41 má tedy posloupnost $\left\{\frac{(-1)^n+2}{2^n(3-(-1)^n)}\right\}$ limitu rovnou 0. ♣

2.6.21. Příklad. Spočtěte limitu rekurentně zadané posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže

$$a_1 = 10 \quad \text{a} \quad a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n},\ n \in \mathbb{N}.$$

Řešení. Předpokládejme nejprve, že posloupnost má vlastní limitu, kterou označíme A. Kombinací 2.2.29(b) a věty o limitě vybrané posloupnosti (Věta 2.2.32) pak dostaneme

$$\lim a_{n+1} = A.$$

Z věty o aritmetice limit (Věta 2.3.27) obdržíme

$$\lim\left(6 - \frac{5}{a_n}\right) = 6 - \frac{5}{A},$$

a tedy

$$A = \lim a_{n+1} = \lim\left(6 - \frac{5}{a_n}\right) = 6 - \frac{5}{A}.$$

Tento vztah chápeme jako rovnici pro neznámou A. Rovnice má dvě řešení, a sice $A = 1$ a $A = 5$.

Zatím jsme dokázali pouze následující implikaci: je-li posloupnost konvergentní, pak platí buď $A = 1$ nebo $A = 5$. Zatím však nevíme, zda posloupnost nějakou limitu má. To se nyní budeme snažit dokázat, a to pomocí věty o limitě monotónní posloupnosti (Věta 2.4.1). Vzhledem k tomu, že $a_1 = 10$ a navíc, jak snadno ověříme dosazením, platí $a_2 < a_1$, je pravděpodobné, že limitou posloupnosti, pokud nějaká existuje, je spíše číslo 5 než číslo 1 a že posloupnost je klesající.

Dokážeme matematickou indukcí, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n > 5$. Pro $n = 1$ je toto tvrzení zřejmé. Předpokládejme tedy, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n > 5$. Potom

$$a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n} > 6 - \frac{5}{5} = 5,$$

a tvrzení tedy vyplývá z principu matematické indukce.

Nyní dokážeme, že posloupnost $\{a_n\}$ je klesající. Zvolme $n \in \mathbb{N}$. Chceme dokázat, že

$$a_n > a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n},$$

jinými slovy

$$a_n - 6 + \frac{5}{a_n} = \frac{a_n^2 - 6a_n + 5}{a_n} = \frac{(a_n - 5)(a_n - 1)}{a_n} > 0.$$

Poslední nerovnost ovšem snadno plyne z toho, že $a_n > 5$.

Dokázali jsme, že posloupnost $\{a_n\}$ je klesající a že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n > 5$, takže $\{a_n\}$ je zdola omezená. Podle věty o limitě monotónní posloupnosti (Věta 2.4.1) je tedy $\{a_n\}$ konvergentní. Označme její limitu symbolem A. Podle úvahy v první části řešení musí platit buď $A = 1$ nebo $A = 5$. Z toho, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n > 5$, vyplývá podle věty o limitě a uspořádání (Věta 2.2.44(b)), že $A \geq 5$, takže možnost $A = 1$ je vyloučena. Můžeme tudíž učinit závěr, že

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 5.$$

♣

2.6.22. Příklad. Nechť $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $a_1 < a_2$, a pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, je hodnota a_n zadána předpisem

$$a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2}.$$

Rozhodněte, zda existuje $\lim a_n$ a pokud ano, spočtěte ji.

Řešení. Nejprve ukážeme, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$a_{2k-1} < a_{2k+1} < a_{2k+2} < a_{2k}. \tag{2.26}$$

Ze zadané nerovnosti $a_1 < a_2$ vyplývá, že

$$a_3 = \frac{a_2 + a_1}{2} < \frac{a_2 + a_2}{2} = a_2$$

(f)

$$x_0 > 0, \qquad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right).$$

Dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

Řešení: Ukážeme, že posloupnost je omezená a monotónní, tedy konvergentní. Označíme-li potom její limitu L, potom musí platit

$$\lim x_{n+1} = \lim \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)$$

$$L = \lim \frac{1}{2}\left(L + \frac{1}{L}\right)$$

odkud plyne, že

$$L = \lim \frac{1}{2}\left(L + \frac{1}{L}\right) \Leftrightarrow L = \frac{1}{L} \Leftrightarrow L^2 = 1.$$

Zřejmě tedy limitou, pokud je posloupnost konvergentní, může být pouze číslo -1 nebo $+1$. Protože $x_0 > 0$, jsou všechny členy posloupnosti nezáporné (díky rekurentnímu vzorci), a tedy -1 nemůže být limitou, zbývá 1.

Zbývá dokázat konvergenci, tj. monotonii a omezenost. Podle nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem (AG-nerovnost) vyplývá, že pro libovolné $a > 0$ je

$$\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) \geq \sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 1,$$

a tedy platí, že libovolný člen posloupnosti s výjimkou x_0 je větší než 1.

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) - x_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1 - x_n^2}{x_n}\right) \leq 0.$$

Odtud plyne, že posloupnost je klesající (přičemž ostře, pokud $0 < x_0 \neq 1$, neboť v AG-nerovnosti nastává rovnost pouze tehdy, dělá-li se průměr stejných čísel). Z toho, že posloupnost je od druhého členu klesající plyne, že je omezená, neboť platí, že

$$0 < x_n \leq \max\{x_0, x_1\}.$$

(g) Nechť $0 \leq a \leq 1$. Vypočtěte limitu posloupnosti definované rekurentně vztahy

$$x_1 = 0, \qquad x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2}(a - x_n^2).$$

Řešení: Pokud $a = 0$, pak je posloupnost identicky nulová a limita je rovna 0.

Nechť tedy $a \neq 0$ a nechť $0 \leq x_n < \sqrt{a}$. Tato nerovnost jistě platí pro x_1. Pak $x_n = \sqrt{a} - \varepsilon$, kde $\varepsilon \leq \sqrt{a}$ a protože platí, že $\sqrt{a} \leq 1$, je také $\varepsilon \geq \sqrt{a}\varepsilon$, a proto

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \sqrt{a} - \varepsilon + \frac{1}{2}(a - (\sqrt{a} - \varepsilon)^2) = \sqrt{a} - \varepsilon + \frac{1}{2}(2\varepsilon\sqrt{a} - \varepsilon^2) \\ &= \sqrt{a} + (\sqrt{a}\varepsilon - \varepsilon) - \varepsilon^2 \leq \sqrt{a} - \varepsilon^2 < \sqrt{a}. \end{aligned}$$

Přitom máme $x_{n+1} \geq 0$, protože pro $x_n < \sqrt{a}$ je přírůstek $\frac{1}{2}(a - x_n^2)$ kladné číslo. Indukcí jsme tak dokázali, že pokud $x_n < \sqrt{a}$, potom také $x_{n+1} < \sqrt{a}$. Tím jsme indukcí dokázali, že posloupnost je omezená a že pro každé n přirozené platí, že $0 \leq x_n < \sqrt{a}$. Z toho plyne, že posloupnost x_n je rostoucí, protože

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}(a - x_n^2) > 0.$$

Z toho plyne, že posloupnost je konvergentní a existuje vlastní limita $\lim x_n = L$. Z toho plyne, že musí platit

$$\lim x_{n+1} = \lim(x_n + \frac{1}{2}(a - x_n^2)) \Leftrightarrow L = L + \frac{1}{2}(a - L^2) \Leftrightarrow L^2 = a \Leftrightarrow L = \pm\sqrt{a}.$$

Protože ale všechny členy posloupnosti jsou kladné, připadá v úvahu pouze $L = \sqrt{a}$. Snadno se ověří, že výsledek platí i pro speciální případ $a = 0$.

Tento vztah chápeme jako rovnici pro neznámou A. Rovnice má dvě řešení, a sice $A = 1$ a $A = 5$.

Zatím jsme dokázali pouze následující implikaci: je-li posloupnost konvergentní, pak platí buď $A = 1$ nebo $A = 5$. Zatím však nevíme, zda posloupnost nějakou limitu má. To se nyní budeme snažit dokázat, a to pomocí věty o limitě monotónní posloupnosti (Věta 2.4.1). Vzhledem k tomu, že $a_1 = 10$ a navíc, jak snadno ověříme dosazením, platí $a_2 < a_1$, je pravděpodobné, že limitou posloupnosti, pokud nějaká existuje, je spíše číslo 5 než číslo 1 a že posloupnost je klesající.

Dokážeme matematickou indukcí, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n > 5$. Pro $n = 1$ je toto tvrzení zřejmé. Předpokládejme tedy, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n > 5$. Potom

$$a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n} > 6 - \frac{5}{5} = 5,$$

a tvrzení tedy vyplývá z principu matematické indukce.

Nyní dokážeme, že posloupnost $\{a_n\}$ je klesající. Zvolme $n \in \mathbb{N}$. Chceme dokázat, že

$$a_n > a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n},$$

jinými slovy

$$a_n - 6 + \frac{5}{a_n} = \frac{a_n^2 - 6a_n + 5}{a_n} = \frac{(a_n - 5)(a_n - 1)}{a_n} > 0.$$

Poslední nerovnost ovšem snadno plyne z toho, že $a_n > 5$.

Dokázali jsme, že posloupnost $\{a_n\}$ je klesající a že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n > 5$, takže $\{a_n\}$ je zdola omezená. Podle věty o limitě monotónní posloupnosti (Věta 2.4.1) je tedy $\{a_n\}$ konvergentní. Označme její limitu symbolem A. Podle úvahy v první části řešení musí platit buď $A = 1$ nebo $A = 5$. Z toho, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n > 5$, vyplývá podle věty o limitě a uspořádání (Věta 2.2.44(b)), že $A \geq 5$, takže možnost $A = 1$ je vyloučena. Můžeme tudíž učinit závěr, že

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 5.$$

♣

2.6.22. Příklad. Nechť $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $a_1 < a_2$, a pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, je hodnota a_n zadána předpisem

$$a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2}.$$

Rozhodněte, zda existuje $\lim a_n$ a pokud ano, spočtěte ji.

Řešení. Nejprve ukážeme, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$a_{2k-1} < a_{2k+1} < a_{2k+2} < a_{2k}. \tag{2.26}$$

Ze zadané nerovnosti $a_1 < a_2$ vyplývá, že

$$a_3 = \frac{a_2 + a_1}{2} < \frac{a_2 + a_2}{2} = a_2$$

a
$$a_3 = \frac{a_2 + a_1}{2} > \frac{a_1 + a_1}{2} = a_1.$$
Odtud dále plyne, že
$$a_4 = \frac{a_3 + a_2}{2} < \frac{a_2 + a_2}{2} = a_2$$
a podobně
$$a_4 = \frac{a_3 + a_2}{2} > \frac{a_3 + a_3}{2} = a_3.$$
Kombinací odhadů dostaneme
$$a_1 < a_3 < a_4 < a_2,$$
což je (2.26) pro $k = 1$. Předpokládejme, že (2.26) platí pro nějaké $k \in \mathbb{N}$. Pak z nerovnosti $a_{2k+1} < a_{2k+2}$ odvodíme
$$a_{2k+1} < \frac{a_{2k+1} + a_{2k+2}}{2} = a_{2k+3}.$$
Z této nerovnosti dále plyne
$$a_{2k+3} = \frac{a_{2k+2} + a_{2k+1}}{2} < \frac{a_{2k+2} + a_{2k+3}}{2} = a_{2k+4}.$$
Konečně z nerovnosti $a_{2k+1} < a_{2k+2}$ dostaneme
$$a_{2k+3} = \frac{a_{2k+2} + a_{2k+1}}{2} < a_{2k+2},$$
a tedy
$$a_{2k+4} = \frac{a_{2k+3} + a_{2k+2}}{2} < a_{2k+2}.$$
Ověřili jsme tedy platnost nerovností (2.26) pro každé $k \in \mathbb{N}$.

Z (2.26) plyne, že posloupnost $\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající, posloupnost $\{a_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_1 \le a_n \le a_2$, takže posloupnosti $\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{a_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ jsou omezené. Podle věty o limitě monotónní posloupnosti (Věta 2.4.1) tedy existují vlastní limity
$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = A \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = B.$$
Ze vztahu
$$a_{n+1} = \frac{a_{n-1} + a_n}{2}$$
vyplývá, že
$$B = \frac{A + B}{2},$$
a tedy $A = B$. Obě posloupnosti $\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{a_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ tedy konvergují ke stejné limitě.

Nechť $k \in \mathbb{N}$, $k \ge 2$. Přepíšeme vzorec definující a_k ve tvaru
$$a_{k+1} - a_k = a_{k-1} - a_{k+1}.$$

Nechť $n \in \mathbb{N}$. Potom pro hodnoty $k = 2, 3, \dots, n$ postupně dostaneme

$$\begin{aligned}
&a_3 - a_2 = a_1 - a_3,\\
&a_4 - a_3 = a_2 - a_4,\\
&\dots\\
&a_{n-1} - a_{n-2} = a_{n-3} - a_{n-1},\\
&a_n - a_{n-1} = a_{n-2} - a_n,\\
&a_{n+1} - a_n = a_{n-1} - a_{n+1}.
\end{aligned}$$

Sečtením všech těchto rovností dostaneme vztah

$$a_{n+1} - a_2 = a_1 + a_2 - a_n - a_{n+1}.$$

Odtud plyne, že

$$A - a_2 = a_1 + a_2 - A - A,$$

a tedy

$$A = \frac{a_1 + 2a_2}{3}.$$

♣

2.6.23. Příklad. Posloupnost $\{a_n\}$ nechť je zadána rekurentně pomocí vztahů $a_1 = 1$ a $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Ukažte, že tato posloupnost má limitu a spočtěte ji.

Řešení. Definujme funkce

$$f(x) = \frac{1}{1+x}, \quad g(x) = f(f(x)) = \frac{1+x}{2+x}, \quad x \in [0,1].$$

Nechť c značí kořen kvadratické funkce $x^2 + x - 1$ nacházející se v intervalu $[0,1]$, tj. $c = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$. Protože $g(x) = 1 - \frac{2}{1+x}$, je g na intervalu $[0,1]$ rostoucí a pomocí elementárního výpočtu ověříme, že

- rovnice $g(x) = x$ má v intervalu $[0,1]$ právě jeden kořen, a to c,
- $x < g(x) < c$ pro $x \in [0,c)$ a $c < x < g(x)$ pro $x \in (c,1]$.

Jelikož pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $a_{2k+2} = g(a_{2k})$ a $a_{2k+1} = g(a_{2k-1})$, dostáváme z vlastností funkce g nerovnosti

$$a_2 < a_4 < \dots < a_{2k} < a_{2k+2} < c < a_{2k+1} < a_{2k-1} < \dots < a_3 < a_1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Posloupnosti $\{a_{2k}\}$ a $\{a_{2k-1}\}$ jsou tedy monotónní a omezené, což znamená podle Věty 2.4.1, že jsou konvergentní. Označme $a = \lim a_{2k}$ a $b = \lim a_{2k-1}$. Protože $a_{2k+2} = g(a_{2k}) = \frac{1+a_{2k}}{2+a_{2k}}$, dostáváme z věty o aritmetice limit (Věta 2.2.36) rovnost $a = g(a)$. Proto $a = c$. Obdobně odvodíme, že $b = c$, a tedy $\lim a_n = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ (vizte Větu 2.3.23). ♣

2.6.24. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n.$$

Příklad 6.2.1. Ukážeme, že $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

***Řešení:* 6.2.1.** Vezměme libovolné $\varepsilon > 0$ a hledejme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_0$ platí

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \frac{1}{1+n} < \varepsilon.$$

Vztah $1/(1+n) < \varepsilon$ platí pro taková $n \in \mathbb{N}$, pro která $n > 1/\varepsilon - 1$. Položme tedy $n_0 = [1/\varepsilon - 1] + 1$. Pokud např. zvolíme $\varepsilon = 10^{-2}$, pak $n_0 = 100$ a všechny členy $a_{100},\ a_{101},\ a_{102}, \ldots$ se od limity, tj. od čísla 1, liší méně než o $10^{-2} = 0,01$.

Příklad 6.2.2. Ukážeme, že posloupnost $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní.

***Řešení:* 6.2.2.** Vypíšeme-li několik prvních členů posloupnosti, získáme

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right).$$

Zdá se tedy, že s rostoucím $n \in \mathbb{N}$ se hodnota členů přibližuje k 0. Vyslovíme hypotézu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0,$$

kterou dokážeme: Vezměme libovolné $\varepsilon > 0$ a hledejme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_0$ platí

$$\left| \frac{1}{2^n} - 0 \right| = \frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

Vztah $1/2^n < \varepsilon$ platí pro taková $n \in \mathbb{N}$, pro která $2^n > 1/\varepsilon$, neboli

$$n > \log_2 \frac{1}{\varepsilon}. \tag{6.6}$$

- Pro $\varepsilon \geq 1$ je $\log_2 \frac{1}{\varepsilon} = -\log_2 \varepsilon \leq 0$, takže (**??**) platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a za $n_0 \in \mathbb{N}$ lze vybrat libovolné číslo.
- Pro $\varepsilon \in (0,1)$ je $\log_2 \frac{1}{\varepsilon} = -\log_2 \varepsilon > 0$. Položíme-li $n_0 = [-\log_2 \varepsilon] + 1$, pak (**??**) platí pro všechna $n \geq n_0$. Je-li např. $\varepsilon = 10^{-6}$, pak $n_0 = 20$, takže všechny členy posloupnosti $a_{20},\ a_{21},\ a_{22},\ a_{23},\ \ldots$ se od limity, tj. od čísla 0, liší méně než o $10^{-6} = 0{,}000\,001$.

Aplikace pojmu limita

Již jsme viděli, jak užitečný je pojem limity posloupnosti při výpočtu odmocniny čísla. Podívejme se nyní na další úlohu, ve které ukážeme ekonomický význam čísla e.

Příklad 6.2.3 (Ekonomický význam čísla e)**.** Představme si, že se nám podařilo nalézt banku, která náš počáteční vklad úročí složeným úročením s úrokovou mírou 100%, tj. $r = 1$. Ptejme se, jakou hodnotu bude v takové bance mít počáteční vklad $P = 1$ Kč na konci prvního roku, tj. $t = 1$, jestliže se úroky připisují každý okamžik, tj. počet úrokovacích období je nekonečný. Použijeme -li odvozený vztah (**??**) a označíme-li počet úrokovacích období n, získáme posloupnost

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

(70) Z definice limity dokažte, že

$$\lim_{n\to\infty} n = \infty.$$

Řešení:

Mějme dle definice $A \in \mathbb{R}$. Musíme určit n_0 tak, aby

$$\forall n > n_0 \text{ platilo } \ a_n > A, \quad \text{tj. } n > A,$$

proto $n_0 := \max\{1 + \lfloor A \rfloor, 1\}$.