11. cvičení - rekurentní posloupnosti

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Definice 1. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}$. Řekneme, že A je *vlastní limitou posloupnosti* $\{a_n\}$, jestliže

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0,\ n \in \mathbb{N}: \quad |a_n - A| < \varepsilon.$$

Značíme $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim a_n = A$ nebo $a_n \to A$.

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu rovnou ∞, jestliže

$$\forall K \in \mathbb{R}\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : a_n > K.$$

Věta 2 (O limitě vybrané posloupnosti)**.** Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost reálných čísel a nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A$. Nechť posloupnost $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ je vybraná z posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Pak $\lim_{k\to\infty} b_k = A$.

Věta 3 (O limitě vybrané posloupnosti)**.** Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost reálných čísel a nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A$. Nechť posloupnost $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ je vybraná z posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Pak $\lim_{k\to\infty} b_k = A$.

Algoritmus

1. Ověříme, že je posloupnost dobře zadaná (nedělíme 0, pod odmocninou není záporné číslo ...).
2. Napíšeme **prvních pár členů** posloupnosti.
3. Spočteme limitu pomocí věty o **limitě vybrané posloupnosti**. Tento krok funguje pouze za předpokladu, že posloupnost má limitu, což musíme ještě ukázat.
4. Ukážeme, že je posloupnost **monotónní** (neklesající nebo nerostoucí). Neboli zda $a_n \leq a_{n+1}$ nebo $a_n \geq a_{n+1}$. Možno převést i na otázku zda
   (a) $a_n - a_{n+1} \leq 0$ (resp. $a_n - a_{n+1} \geq 0$),
   (b) $\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1$ (resp. $\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1$). Dáváme pozor na znaménka.

   Někdy pomůže indukce.
5. Ukážeme, že posloupnost je **omezená**.
   Někdy pomůže ukázat nejprve omezenost a až potom monotonii.
6. Uděláme **závěr**.

Hinty

AG nerovnost: pro $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ platí

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

Příklady

1. Spočtěte limitu rekurentně zadané posloupnosti

   (a) $a_1 = 0$, $a_{n+1} = \frac{a_n+3}{4}$

   (b) $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$

   (c) $a_1 = \sqrt{c}$, $a_{n+1} = \sqrt{c + a_n}$, kde $c \geq 0$.

   (d) $a_1 = 10$, $a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n}$

   (e) $a_1 > 0$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{1}{a_n}\right)$. Dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

   (f) * Nechť $0 \leq a \leq 1$. $a_1 = 0$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}(a - a_n^2)$.

   (g) * $a_1 = a$, $a_2 = b$, $a < b$. $a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2}$.

2. Určete limity z definice:

   (a) $a_n = \frac{n}{n+1}$

   (b) $a_n = \frac{1}{2^n}$

   (c) $a_n = n$

(1a) rostoucí, $a_n \leq 1$
(1b) rostoucí, $a_n \leq 2$
(1c) rostoucí, $a_n \leq \sqrt{c} + 1$
(1d) $a_n \geq 5$, klesající
(1e) z AG nerovnosti: $a_n \geq 1$, klesající
(1f) nechť $a_n = \sqrt{a} - \varepsilon$, kde $\varepsilon \leq \sqrt{a}$, pak $a_{n+1} \leq \sqrt{a}$
$a_n \geq \sqrt{a}$, rostoucí
(1g) ukažte: $a_{2n-1} \leq a_{2n+1} \leq a_{2n+2} \leq a_{2n}$
pak a_{2n} je klesající, pak a_{2n-1} je rostoucí, $a_1 \leq a_n \leq a_2$
ukažte: $a_3 - a_2 = a_1 - a_3$, pak $a_{n+1} - a_n = a_{n-1} - a_{n+1}$.