10. cvičení - éčko

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. (a)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n} &= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{3}\\
&\overset{VOAL}{=} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\\
&= e\cdot e\cdot e = e^3
\end{aligned}$$

(b)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n}$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{\frac{2n}{2}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}} = \sqrt{e}$$

U druhého rovnítka jsme použili větu o mocnině a limitě. U poslední rovnosti jsme užili limitu vybrané posloupnosti, neboť posloupnost a_{2n} musí mít stejnou limitu jako posloupnost a_n, což je známá limita jdoucí k e.

(c)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{-n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1+1}\right)^{-1}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\right)^{-1}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{1}\right)^{-1}\\
&\overset{VOAL}{=} \frac{1}{e}
\end{aligned}$$

(d)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n}$$

Řešení:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1-1-1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{n+1-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1-\frac{2}{n+1}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{-2}}\right)^{n+1}}{\left(1-\frac{2}{n+1}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{-2}}\right)^{\frac{n+1}{-2}\cdot(-2)}}{\left(1-\frac{2}{n+1}\right)} \\
&\overset{VOAL}{=} \frac{\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{-2}}\right)^{\frac{n+1}{-2}}\right)^{-2}}{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)} = \frac{e^{-2}}{1}
\end{aligned}
$$

(e)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$$

Řešení:

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n}} = \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}$$

Z Věty o limitě vybrané posloupnosti máme, že

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \to e,$$

tedy lze nalézt n_0 tak, že pro každé $n \geq n_0$ máme

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} < 10.$$

a

$$1 < \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$$

.

Dohromady máme odhady:

$$1 = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1} \leq \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}} \leq \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{10} = 1,$$

tedy z Věty o dvou policajtech máme

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}} = 1.$$

(f) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, $x \in \mathbb{R}$

Řešení: Uvažujme tři případy.

i. Nechť $x > 0$, pak

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{x}}\right)^{\frac{n}{x}\cdot x} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n}{x}}\right)^{\frac{n}{x}}\right)^x = e^x$$

Využili jsme posloupnost $x_n = n/x$, pro niž platí $x_n \to \infty$.

ii. Nechť $x < 0$, pak $-x > 0$ a:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n}{n+x}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{-x}{n+x}\right)^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\frac{n+x}{-x}}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\frac{n+x}{-x}}\right)^{n+x-x}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\frac{n+x}{-x}}\right)^{n+x}}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\frac{n+x}{-x}}\right)^{-x}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n+x}{-x}}\right)^{\frac{n+x}{-x}}\right)^{-x}}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\frac{n+x}{-x}}\right)^{-x}}$$

$$= \frac{1}{e^{-x}}\cdot\frac{1}{1^{-x}} = e^x$$

Využili jsme posloupnost $x_n = \frac{n+x}{-x}$, pro niž platí $x_n \to \infty$.

iii. Nechť $x = 0$. Pak $a_n = 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, tedy $\lim_{n\to\infty} a_n = 1 = e^0$.

(g) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+\sin n}\right)^n$

Řešení:

Použijeme dva policajty

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \le \left(1+\frac{1}{n+\sin n}\right)^n \le \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n$$

Navíc platí

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} = \frac{e}{1}$$

a

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right) = e$$

Ze dvou policajtů tedy dostáváme

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+\sin n}\right)^n = e$$

(h) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+4}{n-2}\right)^{n+1}$

Řešení:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+4}{n-2}\right)^{n+1} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-2+6}{n-2}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{6}{n-2}\right)^{n-2+3}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{6}{n-2}\right)^{3}\cdot\left(1+\frac{6}{n-2}\right)^{n-2} =\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{6}{n-2}\right)^{3}\cdot\left(1+\frac{1}{\frac{n-2}{6}}\right)^{\frac{n-2}{6}\cdot 6} =\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{6}{n-2}\right)^{3}\cdot\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n-2}{6}}\right)^{\frac{n-2}{6}}\right)^{6} \overset{VOAL}{=} 1\cdot e^{6}\end{aligned}$$

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-1}{n^2-3}\right)^{n+1}$

Řešení:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2-3}\right)^{n+1} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-3+2}{n^2-3}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n^2-3}\right)^{\frac{n(n+1)}{n}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{2}{n^2-3}\right)^{n^2-3+3+n}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{2}{n^2-3}\right)^{3}}\sqrt[n]{\left(1+\frac{2}{n^2-3}\right)^{n}}\sqrt[n]{\left(1+\frac{2}{n^2-3}\right)^{n^2-3}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{2}{n^2-3}\right)^{3}}\sqrt[n]{\left(1+\frac{2}{n^2-3}\right)^{n}}\sqrt[n]{\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n^2-3}{2}}\right)^{\frac{n^2-3}{2}}\right)^{2}}\\
&\overset{VOAL}{=} 1\cdot 1\cdot 1.\end{aligned}$$

Na poslední limitu užijeme dva policajty, protože

$$\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n^2-3}{2}}\right)^{\frac{n^2-3}{2}}\right)^{2} \to e^{2},$$

budou tak od jistého n_0 platit odhady

$$1 \le \left(\left(1+\frac{1}{\frac{n^2-3}{2}}\right)^{\frac{n^2-3}{2}}\right)^{2} \le 10.$$

2. (a)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}$$

Řešení:
Použijeme větu o součinu omezené a mizející posloupnosti, $1 \geq \sin n \leq 1$, $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$, tedy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$$

(b)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n + \left(1-\frac{1}{n}\right)^n}$$

Řešení:
Odhadneme

$$\sqrt[n]{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n} \leq \sqrt[n]{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n + \left(1-\frac{1}{n}\right)^n} \leq \sqrt[n]{2\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}$$

Navíc

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right) = 1$$

a

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2\left(1+\frac{2}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} \cdot \left(1+\frac{2}{n}\right) = 1 \cdot (1+0)$$

Ze dvou policajtů tedy

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n + \left(1-\frac{1}{n}\right)^n} = 1$$

(c) $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \dfrac{n^2 \sqrt[n]{n}}{n^3 + \sqrt[2n]{n}}$

Řešení: Prve spočteme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \sqrt[n]{n}}{n^3 + \sqrt[2n]{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3} \cdot \frac{\sqrt[n]{n}}{1 + \frac{(\sqrt[n]{n})^{\frac{1}{2}}}{n^3}} \overset{VOAL}{=} 0 \cdot \frac{1}{1+0} = 0.$$

Z věty o omezené a nulové posloupnosti pak máme i

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n^2 \sqrt[n]{n}}{n^3 + \sqrt[2n]{n}} = 0$$

(d)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+n+1}{n^\alpha}$$

$\alpha \in \mathbb{N}$
Řešení:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+n+1}{n^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^\alpha} \frac{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{1} = \begin{cases} 1, & \alpha = 3 \\ 0, & \alpha > 3 \\ \infty, & \alpha < 3 \end{cases}$$

(e)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2+(3n+2)^4}{n^\alpha+n^4}$$

$\alpha \in \mathbb{N}$
Řešení:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2+(3n+2)^4}{n^\alpha+n^4} = \lim_{n\to\infty} 3^4 n^4 \frac{(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})^2+(1+\frac{2}{3n})^4}{n^\alpha+n^4} = \begin{cases} 81/2, & \alpha=4 \\ 0, & \alpha>4 \\ 81, & \alpha<4 \end{cases}$$

(f)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n-2)^4-(n^2+1)^2}{n^\alpha+n^2}$$

$\alpha \in \mathbb{N}$ **Řešení:**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n-2)^4-(n^2+1)^2}{n^\alpha+n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^4-2\cdot 4n^3+\cdots+2^4)^4-(n^4+2n^2+1)}{n^\alpha+n^2}$$
$$= \begin{cases} -8, & \alpha=3 \\ 0, & \alpha>3 \\ -\infty, & \alpha<3 \end{cases}$$

(g)

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha \left(\sqrt[3]{n^2+1}-\sqrt[3]{n^2-1}\right),$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$
Řešení: Odstraněním odmocniny z čitatele pomocí vhodného rozšíření (viz jmenovatel následujícího zlomku) máme

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha \left(\sqrt[3]{n^2+1}-\sqrt[3]{n^2-1}\right)$$
$$= \lim_{n\to+\infty} n^\alpha \frac{(n^2+1)-(n^2-1)}{\sqrt[3]{(n^2+1)^2}+\sqrt[3]{n^2+1}\sqrt[3]{n^2-1}+\sqrt[3]{(n^2-1)^2}}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^\alpha}{\sqrt[3]{(n^2+1)^2}+\sqrt[3]{n^2+1}\sqrt[3]{n^2-1}+\sqrt[3]{(n^2-1)^2}}$$

a vytknutím $n^{4/3}$ ze jmenovatele dostaneme

$$= \lim_{n\to+\infty} n^{\alpha-4/3} \frac{2}{\sqrt[3]{(1+1/n^2)^2}+\sqrt[3]{1+1/n^2}\sqrt[3]{1-1/n^2}+\sqrt[3]{(1-1/n^2)^2}}$$

a) Pro $\alpha = 4/3$ vyjde

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt[3]{(1+1/n^2)^2}+\sqrt[3]{1+1/n^2}\sqrt[3]{1-1/n^2}+\sqrt[3]{(1-1/n^2)^2}} = \frac{2}{1+1+1} = \frac{2}{3}$$

b) Pro $\alpha > 4/3$ vyjde

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha-4/3} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt[3]{(1+1/n^2)^2} + \sqrt[3]{1+1/n^2}\sqrt[3]{1-1/n^2} + \sqrt[3]{(1-1/n^2)^2}}$$
$$= (+\infty) \cdot \frac{2}{3} = +\infty$$

c) Pro $\alpha < 4/3$ vyjde

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha-4/3} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt[3]{(1+1/n^2)^2} + \sqrt[3]{1+1/n^2}\sqrt[3]{1-1/n^2} + \sqrt[3]{(1-1/n^2)^2}}$$
$$= 0 \cdot \frac{2}{3} = 0.$$

(h) Určete $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n^3 - n} - an - b) = 0$$

Řešení:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n^3 - n} - an - b) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 - n - (an+b)^3}{(n^3-n)^{2/3} + (n^3-n)^{1/3}(an+b) + (an+b)^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 - n - (a^3n^3 + 3a^2n^2b + 3anb^2 + b^3)}{(n^3-n)^{2/3} + (n^3-n)^{1/3}(an+b) + (an+b)^2}\end{aligned}$$

Vedoucí člen ve jmenovateli je n^2, v čitateli $n^3(1-a^3)$. Aby byla limita vlastní, musí být $a = 1$. Pak v čitateli zbývá $3a^2n^2b$, které se také musí vynulovat, jinak by limita byla > 0. Tedy $b = 0$.

(i) Určete $\alpha > 0$ tak, aby následující limita byla vlastní

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n^\alpha + 1)^3 + \alpha(-1)^n}{n^2(\sqrt{n^2+1} - n)}$$

Řešení:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{(n^\alpha + 1)^3 + \alpha(-1)^n}{n^2(\sqrt{n^2+1} - n)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n^\alpha + 1)^3 + \alpha(-1)^n}{n^2(\sqrt{n^2+1} - n)} \cdot \frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{n^2+1}+n} \\ &= \lim_{n\to\infty} n^{3\alpha} \frac{(1+\frac{1}{n^\alpha})^3 + \frac{\alpha(-1)^n}{n^{3\alpha}}}{n^2} \cdot n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} n^{3\alpha-1}\left[\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)^3 + \frac{\alpha(-1)^n}{n^{3\alpha}}\right] \cdot \left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right) \\ &= \begin{cases} 2, & \alpha = 1/3 \\ \infty, & \alpha > 1/3 \\ 0, & \alpha < 1/3 \end{cases}\end{aligned}$$

(j)

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2-n}-2n)$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2-n}-2n) = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2-n}-2n)\cdot\frac{\sqrt{4n^2-n}+2n}{\sqrt{4n^2-n}+2n} = \lim_{n\to\infty}\frac{-n}{\sqrt{4n^2-n}+2n}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}\frac{-1}{\sqrt{4-\frac{1}{n}}+2} = -\frac{1}{4}$$

(k)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)+1}{(n+2)-1} = 1.$$

(l)

$$\lim_{n\to\infty}(1+\sin n\pi)$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty}(1+\sin n\pi) \overset{VOAL}{=} 1+\lim_{n\to\infty}\sin n\pi = 1+0 = 1.$$

3. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost, $\lim_{n\to\infty} a_n = A$. Co můžeme říct o $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n a_n$?

   Řešení: Limita existuje, právě když $\lim a_n = 0$.

   Jestliže $\lim a_n = 0$, potom $\lim(-1)^n a_n = 0$ podle věty o limitě součinu omezené posloupnosti a posloupnosti jdoucí k nule.

   Jestliže $\lim a_n = A \neq 0$, pak pro sudé členy máme limitu rovnu A, pro liché členy $-A$. Což je spor s jednoznačností limity.

4. Existují posloupnosti $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ takové, že $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ a $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n$ neexistuje?

   Řešení: Ano. Např. $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $b_n = n^2$. Pak $a_n b_n = (-1)^n n$.

5. Nechť $\{a_n\}$ je konvergentní posloupnost racionálních čísel. Musí být limita racionální číslo?

Řešení: Ne. Např. posloupnost

$$\begin{aligned}
a_1 &= 3\\
a_2 &= 3,1\\
a_3 &= 3,14\\
a_4 &= 3,141\\
a_5 &= 3,1415\\
a_6 &= 3,14159\\
a_7 &= 3,141592\\
a_8 &= 3,1415926\\
&\downarrow\\
&\pi
\end{aligned}$$

6. Nechť $\{a_n\}$ je omezená posloupnost taková, že $a_{n+2} \geq a_n$. Musí mít a_n limitu?
   Řešení: Nikoli. Např. $(-1)^n \geq (-1)^{n+2}$.