10. cvičení - éčko

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (O limitě vybrané posloupnosti)**.** Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost reálných čísel a nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A$. Nechť posloupnost $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ je vybraná z posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Pak $\lim_{k\to\infty} b_k = A$.

Fakta

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Nechť x_n je posloupnost, $x_n \to \infty$. Pak

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e.$$

Dk. prof. Huška: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~mhusek/exercise/Poznamka5.pdf

Příklady

1. Spočtěte limity

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}$

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n}$

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}$

(d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n}$

(e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n}$

(f) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}$, $x\in\mathbb{R}$

(g) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+\sin n}\right)^{n}$

(h) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+4}{n-2}\right)^{n+1}$

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2-3}\right)^{n+1}$

Opakování

2. Spočtěte limity

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}$

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n+\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}$

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{n^2\sqrt[n]{n}}{n^3+\sqrt[2n]{n}}$

(d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+n+1}{n^\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{N}$

(e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+(3n+2)^4}{n^\alpha+n^4}$, $\alpha\in\mathbb{N}$

(f) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(n-2)^4-(n^2+1)^2}{n^\alpha+n^2}$, $\alpha\in\mathbb{N}$

(g) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^\alpha\left(\sqrt[3]{n^2+1}-\sqrt[3]{n^2-1}\right)$, kde $\alpha\in\mathbb{R}$

(h) Určete $a,b\in\mathbb{R}$ tak, aby $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3-n}-an-b\right)=0$

(i) Určete $\alpha>0$ tak, aby násl. limita byla vlastní $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(n^\alpha+1)^3+\alpha(-1)^n}{n^2(\sqrt{n^2+1}-n)}$

(j) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2-n}-2n\right)$

(k) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$

(l) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(1+\sin n\pi)$

Teorie

3. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost, $\lim_{n\to\infty} a_n = A$. Co můžeme říct o $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n a_n$?

4. Existují posloupnosti $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ takové, že $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ a $\lim_{n\to\infty} a_n b_n$ neexistuje?

5. Nechť $\{a_n\}$ je konvergentní posloupnost racionálních čísel. Musí být limita racionální číslo?

6. Nechť $\{a_n\}$ je omezená posloupnost taková, že $a_{n+2} \geq a_n$. Musí mít a_n limitu?