9. cvičení - vybraná podposloupnost

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Spočtěte limitu, neexistuje-li, najděte limes superior a inferior a hromadné body

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)$

   Řešení: Posloupnost postupně nabývá hodnot

   $$\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \dots$$

   Hromadné body:

   $$\left\{0, \pm 1, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$$

   $\limsup a_n = 1$, $\liminf a_n = -1$

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} 3\left(1 - \frac{1}{n}\right) + 2(-1)^n$

   Řešení: Pro $n = 2k-1$, $k = 1, 2, \dots$, (tedy pro lichá n) máme

   $$\lim_{k=1} 3 - \frac{3}{2k-1} - 2 = \lim_{k=1} 1 - \frac{3}{2k-1} = 1.$$

   Pro $n = 2k$, $k = 1, 2, \dots$, (tedy pro sudá n) máme

   $$\lim_{k=1} 3 - \frac{3}{2k} + 2 = \lim_{k=1} 5 - \frac{3}{2k} = 5.$$

   Hromadné body jsou $\{1, 5\}$, $\limsup a_n = 5$, $\liminf a_n = 1$.

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2 + 2n + n\sin 2n}{n\cos 3n + (2n + \sin 4n)^2}$

   Řešení:

   Vytkneme nejrychlejší člen:

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + 2n + n\sin 2n}{n\cos 3n + (2n + \sin 4n)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \frac{2}{n} + \frac{\sin 2n}{n}}{\frac{\cos 3n}{n} + 4 + \frac{4\sin 4n}{n} + \frac{\sin^2 4n}{n}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

   Protože limita existuje, tak hromadným bodem je jen $\frac{1}{2}$ a $\limsup a_n = \liminf a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

   (d) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^{n-1}\left(2 + \frac{3}{n}\right)$

   Řešení: Posloupnost není konvergentní. Má jen dva hromadné body, a to limity vybraných podposloupností $x_{2n} = (2 + \frac{3}{n})$ a $x_{2n+1} = -(2 + \frac{3}{n})$. Proto

   $$\limsup x_n = 2, \qquad \liminf x_n = -2.$$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1+(-1)^n}{2}$

Řešení: Posloupnost má jen dva hromadné body, a to limity vybraných podposloupností $x_{2n} = \frac{1}{n} + 1$ a $x_{2n+1} = \frac{1}{n}$. Proto

$$\limsup x_n = 1, \qquad \liminf x_n = 0.$$

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \dfrac{n}{n+1} \cos \dfrac{n\pi}{2}$

Řešení: Protože $\cos \frac{n\pi}{2}$ nabývá popořadě hodnot $0, -1, 0, 1$, jsou nenulové pouze sudé členy posloupnosti. Ty jsou rovny

$$x_{2n} = 1 - \frac{2n}{2n+1} \to 0, \qquad x_{4n} = 1 + \frac{4n}{4n+1} \to 2.$$

Liché členy posloupnosti jsou nulové. Hromadné body posloupnosti jsou tedy $\{0, 2\}$, proto

$$\limsup x_n = 2, \qquad \liminf x_n = 0.$$

(g) $\lim\limits_{n\to\infty} 1 + 2(-1)^{n+1} + 3 \cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

Řešení: Člen $n(n-1)/2$ je sudý pro $n = 4k$ a $n = 4k+1$, naopak pro $n = 4k+2$ a $n = 4k+3$ je lichý. Posloupnost x_n tedy tvoří čtyři konstantní podposloupnosti:

$$x_{4n} = 1{+}2{+}3 = 6, \quad x_{4n+1} = 1{-}2{+}3 = 2, \quad x_{4n+2} = 1{+}2{-}3 = 0, \quad x_{4n+3} = 1{-}2{-}3 = -4.$$

Z toho plyne, že $\limsup x_n = \sup x_n = 6$ a $\liminf x_n = \inf x_n = -4$. Hromadné body jsou $\{-4, 0, 2, 6\}$.

(h) $\lim\limits_{n\to\infty} (\cos \pi n)^n n$

Řešení: Podposloupnosti $x_{2n} = 2n$ a $x_{2n+1} = -2n-1$ rostou do $+\infty$, resp. klesají do $-\infty$. Tedy

$$\limsup x_n = \sup x_n = +\infty, \qquad \liminf x_n = \inf x_n = -\infty.$$

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} -n[2 + (-1)^n]$

Řešení: Posloupnost je konvergentní, protože $-n[2+(-1)^n] \le -n \to -\infty$. Proto

$$\limsup x_n = \liminf x_n = \inf x_n = -\infty.$$

(j) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n(-1)^n}{n+1} + \sqrt[n]{2}$

Řešení: Pro $n = 2k-1$, $k = 1, 2, \ldots$, (tedy pro lichá n) máme

$$\lim_{k=1} \frac{-2(2k-1)}{2k+1+1} + \sqrt[2k+1]{2} = -2 + 1 = -1$$

Pro $n = 2k$, $k = 1, 2, \ldots$, (tedy pro sudá n) máme

$$\lim_{k=1} \frac{2(2k)}{2k+1} + \sqrt[2k]{2} = 2 + 1 = 3$$

Tedy $\limsup a_n = 3$, $\liminf a_n = -1$, hromadné body: $\{-1, 3\}$.

2. (a) Nechť M je konečná množina přirozených čísel. Najděte posloupnost a_n takovou, že její množina hromadných bodů je rovna M.

   Řešení: Nechť M je tvaru $\{m_1, m_2, \ldots, m_k\}$. Hledaná posloupnost je pak tvaru $a_1 = m_1$, $a_2 = m_2$,..., $a_k = m_k$, $a_{k+1} = m_1$, $a_{k+2} = m_2$,... (cyklus přes M).

   (b) Najděte posl. a_n takovou, že její množina hromadných bodů je rovna $\mathbb{N} \cup \infty$.

   Řešení: Např. posloupnost $\{a_n\} = \{1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

   (c) Ukažte, že nelze najít takovou posloupnost, aby množina jejích hromadných bodů byla rovna $\mathbb{N}$.

   Řešení: Myšlenka:

   Nechť $\{a_n\}$ je taková posloupnost, že množina jejích hromadných bodů je rovna $\mathbb{N}$. Pak lze vybrat podposloupnosti takové, že

$$
\begin{array}{cccccc}
\color{red}{a_1^1}, & a_2^1, & a_3^1, & a_4^1, & \ldots & \to 1 \\
a_1^2, & \color{red}{a_2^2}, & a_3^2, & a_4^2, & \ldots & \to 2 \\
a_1^3, & a_2^3, & \color{red}{a_3^3}, & a_4^3, & \ldots & \to 3 \\
a_1^4, & a_2^4, & a_3^4, & \color{red}{a_4^4}, & \ldots & \to 4
\end{array}
$$

   Vybereme diagonálně prvky $a_1^1, a_2^2, a_3^3, a_4^4, \ldots$. Ty vytvoří posloupnost jdoucí do ∞, což spor.