

6. cvičení - hyperbolické funkce

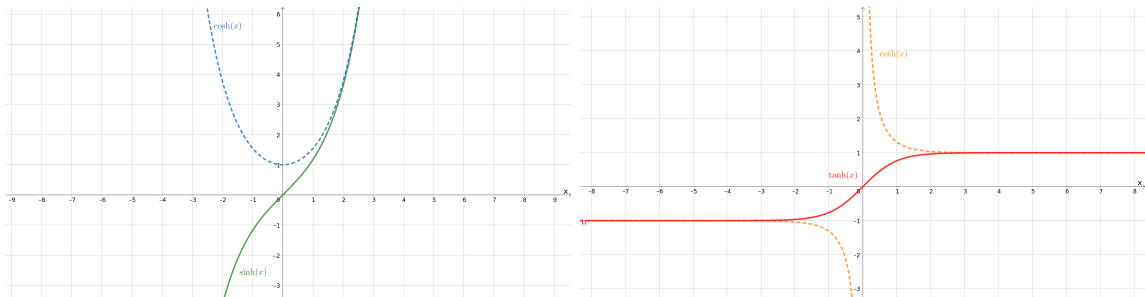
<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>

kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

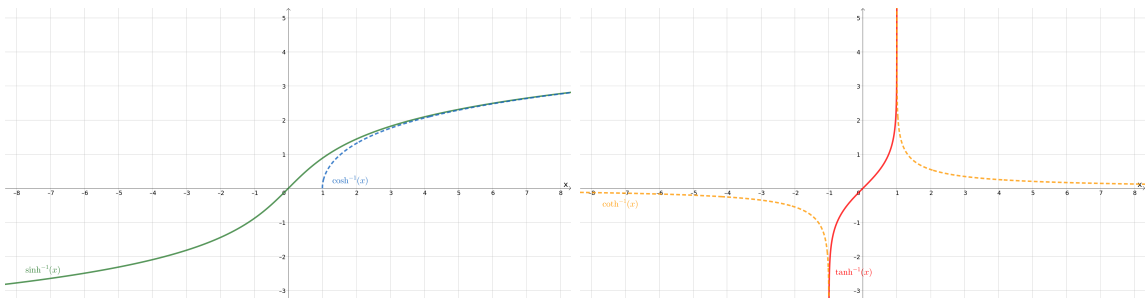
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$



$$\arg \sinh x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) \quad \arg \tanh x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$$

$$\arg \cosh x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right) \quad \arg \coth x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right)$$



Příklady

1. Ukažte, že

- | | |
|--|---|
| (a) $\cosh x + \sinh x = e^x$ | (e) $\cosh x$ je sudá funkce
($\cosh(-x) = \cosh(x)$) |
| (b) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
(užijte vzorce $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$) | (f) $\sinh x$ je lichá funkce
($\sinh(-x) = -\sinh x$) |
| (c) $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$ | (g) $\coth x$ je sudá funkce
(za pomoci (e) a (f)) |
| (d) $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$ | |

(h) $\tanh x$ je lichá funkce

$$(j) \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$$

$$(i) \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

2. Vyjádřete:

$$(a) \sinh(\ln 3)$$

$$(b) \cosh(\ln 2)$$

$$(c) \coth\left(\ln \frac{1}{3}\right)$$

3. Řešte rovnice s neznámou x (bez použití arg funkcí):

$$(a) \sinh x = \frac{3}{4}$$

$$(c) 2 \cosh 2x + 10 \sinh 2x = 5$$

$$(b) \cosh x = \frac{13}{5}$$

$$(d) 4 \cosh x + \sinh x = 4$$

4. Víte-li, že $\sinh x = \frac{5}{12}$, určete

$$(a) \cosh x$$

$$(b) \coth x$$

$$(c) \tanh x$$

$$(d) \sinh 2x$$

$$(e) \cosh 2x$$

5. Ukažte, že $\arg \sinh x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

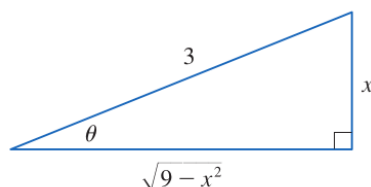
6. Vyjádřete za pomoci logaritmu

$$(a) \arg \sinh \frac{3}{4}$$

$$(b) \arg \cosh 2$$

$$(c) \arg \tanh \frac{1}{2}$$

7. (a) Uvažujme $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a položme $x = 3 \sin \theta$. Porovnejme s obrázkem. Ukažte, že $\sqrt{9 - x^2} = 3 \cos \theta$ a $\cot \theta = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x}$.



https://www.stewartcalculus.com/data/CALCULUS%20Concepts%20and%20Contexts/upfiles/3c3-TrigonometSubstitu_Stu.pdf

(b) Uvažujme $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a položme $x = 2 \tan \theta$. Načrtněte obrázek a ukažte, že $\frac{2}{\cos \theta} = \sqrt{x^2 + 4}$.

(c) Uvažujme $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, $a > 0$ a položme $x = a \frac{1}{\cos \theta}$. Načrtněte obrázek a vyjádřete $\frac{1}{\cos \theta} + \tan \theta$ pomocí x (ukážte bez pomoci obrázku).

(d) Uvažujme $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $a > 0$ a položme $x = a \tan \theta$. Načrtněte obrázek a vyjádřete $\sin \theta$ pomocí x (ukážte bez pomoci obrázku).

8. Uvažujme $\theta \in \mathbb{R}$ a položme $x = 2 \cosh \theta$. Vyjádřete $4 \cosh \theta \sinh \theta$.