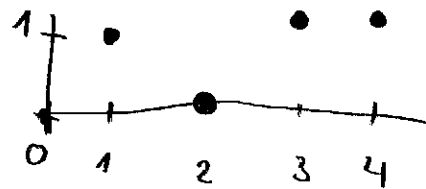


(1) Ukaže, že počet + počet možin $\{1, \dots, n\}$ je 2^n (1)

pro $A \subseteq \{1, \dots, n\}$

definujeme funkci $\chi_A: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{0, 1\}$

$$\chi_A(k) = \begin{cases} 0 & k \notin A \\ 1 & k \in A \end{cases}$$



$$A = \{1, 3, 4\}$$

že tato funkce jednoznačně určuje podmnožinu $\{1, \dots, n\}$.

Funkci χ_B , $B \subseteq \{1, \dots, n\}$ je 2^n

(každému $i \in \{1, \dots, n\}$ lze přiřadit hodnotu 0 nebo 1)

(Pozn. $\emptyset \subseteq A \subseteq \{1, \dots, n\}$, $\{1, \dots, n\} \subseteq \{1, \dots, n\}$.)

$$2a) \mathbb{N}_0 \approx \mathbb{N}$$

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$$

$$f(n) = n+1$$

$$n \in \mathbb{N}_0$$

$$f \text{ is bijective}$$

$$2b) \mathbb{Z} \approx \mathbb{N}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array}$$

$$f(n) = 2n \quad n \in \mathbb{N}$$

$$f(m) = -m \cdot 2 + 1 \quad m \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$$

$$f(0) = 1$$

Důkaz. Je-li A prázdná, pak je zřejmě omezená, neboť každé $x \in \mathbb{R}$ je zároveň horní i dolní závorou množiny A .

Nechť je A neprázdná. V tomto případě provedeme důkaz matematickou indukcí podle počtu jejích prvků. Je-li A jednoprvková, je tvrzení zřejmé. Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro každou množinu o n prvcích. Nechť A je množina o $n + 1$ prvcích, tj. existuje bijekce $\varphi: \{1, \dots, n + 1\} \rightarrow A$. Položme $B = \{\varphi(1), \dots, \varphi(n)\}$. Pak $B \subset \mathbb{R}$ má n prvků, a tedy je dle indukčního předpokladu omezená a existuje její maximum G' a minimum g' . Položme

$$g = \min\{\varphi(n + 1), g'\}, \quad G = \max\{\varphi(n + 1), G'\}.$$

Čísla g a G jsou dobře definovaná dle Příkladu 1.5.19. Dále platí

$$\forall i \in \{1, \dots, n + 1\}: g \leq \varphi(i) \leq G.$$

Tedy g je dolní závora množiny A a G je horní závora množiny A . Proto je množina A omezená. Protože $g', G' \in \varphi(\{1, \dots, n\}) \subset A$, je $g, G \in A$. Nalezli jsme tedy minimum i maximum množiny A . Dle principu matematické indukce tedy tvrzení platí pro všechny konečné podmnožiny $A \subset \mathbb{R}$. ■

1.6.14. Věta. Množina $\mathbb{N}$ je nekonečná.

Důkaz. Provedeme důkaz sporem. Předpokládejme, že množina $\mathbb{N}$ je konečná. Podle Věty 1.6.13 je potom množina $\mathbb{N}$ omezená, a tedy existuje její horní závora v $\mathbb{R}$, kterou označíme K . Potom podle Archimédovy vlastnosti reálných čísel (Věta 1.5.27) existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $n > K$. Tudíž K není horní závorou množiny $\mathbb{N}$, což je spor. ■

Následující lemma může být poněkud překvapivé, protože ukazuje, že množinu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je možné prostě zobrazit do $\mathbb{N}$.

1.6.15. Lemma. Zobrazení $\varphi: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definované předpisem

$$\varphi(n, m) = (n + m)^2 + n, \quad (n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},$$

je prosté.

Důkaz. Předpokládejme, že platí $\varphi(n, m) = \varphi(n', m')$ pro $(n, m), (n', m') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Potom máme

$$\begin{aligned} (n' + m' + 1)^2 &> (n' + m')^2 + n' = \varphi(n', m') = \varphi(n, m) \\ &= (n + m)^2 + n > (n + m)^2. \end{aligned}$$

Odtud plyne nerovnost $n' + m' + 1 > n + m$. Potom máme $n + m \leq n' + m'$. Obdobně odvodíme nerovnost $n' + m' \leq n + m$. Musí tedy platit $n' + m' = n + m$. Odtud a z rovnosti $\varphi(n, m) = \varphi(n', m')$ plyne $n = n'$, a tedy také $m = m'$. Zobrazení φ je tedy prosté. ■

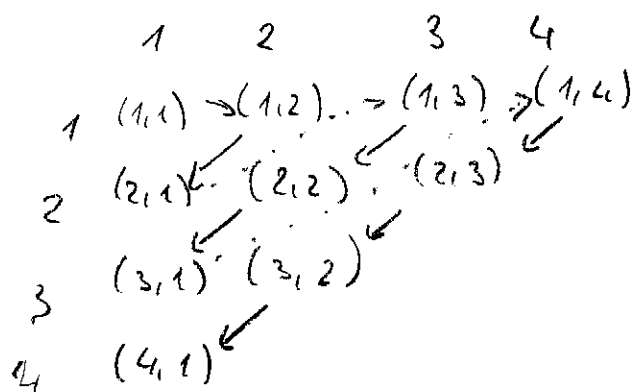
1.6.16. Lemma. Nechť A, B jsou množiny a $f: A \rightarrow B$ je zobrazení. Pak $f(A) \subseteq B$.

2a)

(3)

• $\mathbb{N}$ je spočetná

• $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je také spočetná dle předpisu výše



• jakékoliv podmnožina $\mathbb{N}$ je také spočetná

Nechť $A \subseteq \mathbb{N}$ ~~je~~ nekonečná

chceme ukázat, že $|A| = |\mathbb{N}|$

$A \subseteq \mathbb{N}$ tedy $|A| \leq |\mathbb{N}|$

A je nekonečná $|A| \geq |\mathbb{N}|$

tedy $|A| = |\mathbb{N}|$

nebo

vybrání podpočetnosti

2e Q je správně.

(3)

- Q je správně uspořádána ($\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$)
- musíme najít bijekci $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$
tu sestavíme do obrazku:

Q čísla seřadíme
do tabulky

a nezapomeneme

takto:

0, $\frac{1}{1}$, $-\frac{1}{1}$, $\frac{2}{1}$, $-\frac{3}{1}$,

$\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{3}$

$\frac{2}{2}$, $-\frac{2}{2}$, $\frac{3}{1}$, $-\frac{3}{1}$

$\frac{4}{1}$, atd.

0	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{1}{1} \rightarrow \frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{6}{1}$	
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{6}{2}$
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{6}{3}$
4	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{4}$
5	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{6}{5}$
	$\frac{1}{6}$					

jejich pořadí v tomto "hadronu" pak dává vyžehlenou
bijekci

$$28) \quad (0,1) \approx \mathbb{Q}$$

potřebujeme najít bijekci $f: (0,1) \approx \mathbb{Q}$

např. $f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \pi x\right)$

$$29) \quad \mathbb{N} \leq \mathbb{Q} \text{ ale } \mathbb{N} \not\approx \mathbb{Q}$$

$$\nearrow$$

$$\mathbb{N} \leq \mathbb{Q} \checkmark$$

$$\nearrow$$

Cantorova diag.
metoda

(2g) -

$\mathbb{R}$ není spočetné

zapsané v 3 systémech

uvažujeme interval $(0, 1)$ a jeho prvky sestávají

z 0 a 1. Ty také musí být spočetné

→ seřadíme je

a_1 0, 0 0 0 1 0 ...

a_2 0, 1 0 1 0 0 ...

a_3 0, 1 1 1 0 0 ...

a_4 0, 0 1 0 1 1 ...

a_5 0, 1 1 0 1 0 ...

|| doplníme nulami ||

každé sestavené číslo y bude je reálné číslo na diagonále a prohodíme 0 a 1.

(v našem případě $\rightarrow 0, 11001...$)

Ale toto v naší posloupnosti se nachází y ?

L Tečky $(0, 1)$ je nepočítaný a tedy i $\mathbb{R}$

3

mní $A_n, n \in \mathbb{N}$ jsou spočetná

Pak $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ je spočetná

Prvky A_n zapíšeme $(a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \dots), (a_{21}, a_{22}, \dots)$

definujeme zobrazení $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

že $f(k, l) = a_{kl}$

f je zjevně na

f nemusí být prosté (du mohou mít společné prvky),
ale to nevadí, uka že.

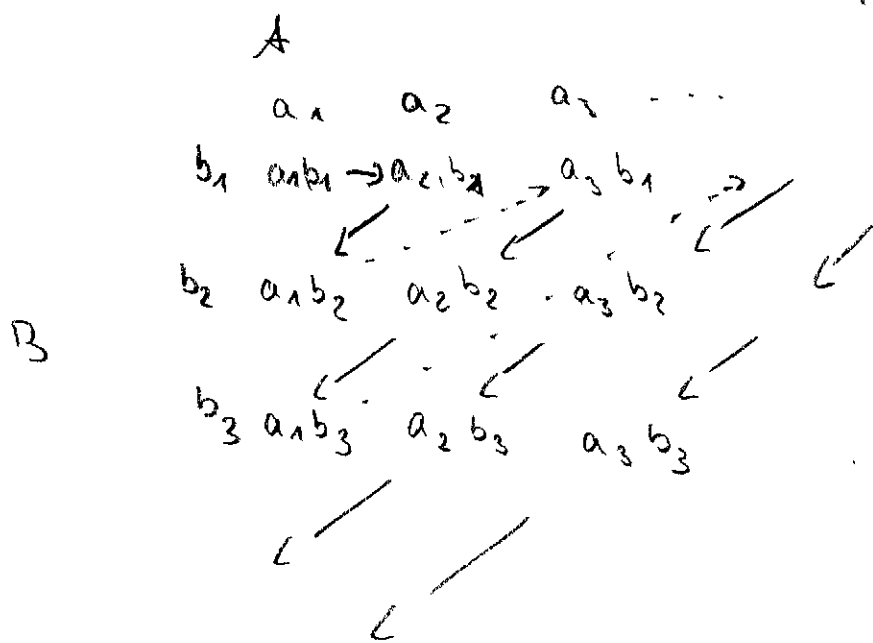
(4)

A, B jsou správné $\Rightarrow A \times B$ je správná

(5)

Dle obrazu

A, B spr $\rightarrow$ lze je zjednot do
pořadí



předpok: dvojice (a_i, b_j) bude v pořadí

na místě $i + \frac{(i+j)(i+j+1)}{2}$

5

6

• nekonečná podmna B spoč. mny A má stejnou mocnost jako $\mathbb{N}$

$B \subseteq A$, A je spoč., B nekonečná



je přidat do počítání

B je pak vybraná početnost $\rightarrow$ také spočítat

⑤ BÚVO $A \subset \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$. Pak $|A| = |\mathbb{N}|$

• $A \subset \mathbb{N}$ $f(m) = m$ f prosté
 $f: A \rightarrow \mathbb{N}$ $A \subseteq \mathbb{N}$

• hledáme zobr. $g: \mathbb{N} \rightarrow A$ prosté

(a) najdeme nejmenší prvek $a \in A$
položíme $g(1) = a$

(b) nejmenší prvek $b \in A \setminus \{g(1)\}$
položíme $g(2) = b$

atd.

pak g je prosté.

Ukažme $g(m) = g(n)$. Ukážeme že $m = n$

Umo.

$g(m)$ je nejmenší prvek množiny

$$A \setminus \{g(1), \dots, g(m-1)\}$$

$$g(n)$$

nejm.

$$A \setminus \{g(1), \dots, g(n-1)\}$$

ale

BÚVO

$m < n$. Pak

$$A \setminus \{g(1), \dots, g(m-1)\} \neq A \setminus \{g(1), \dots, g(n-1)\}$$

$$g(m) \neq g(n)$$

Tyto 2 množiny ale mají stejný nejmenší prvek,
což je spor.

6. $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, rozhodnuto o pravdivosti vět. tvrzení

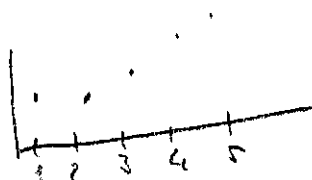
• Je-li $f(n)$ konečné, není f prosté

• Je-li $f(n)$ nekonečné, je f prosté

zobrazení

$$f(1) = 1$$

$$f(n) = n-1 \quad n > 1$$



Pozn.

$$A \Rightarrow B'$$

$$A' \Rightarrow B$$

souvisí to? Ne

A	B
+	+
+	-
-	+
-	-

$A \Rightarrow B'$
-
+
+
+

$A' \Rightarrow B$
+
+
+
-

• $\mathbb{N} \setminus f(\mathbb{N}) = \emptyset$, je f prosté

viz předchozí případ

pro to, kdybychom měli, že pro je f na

• Je-li f prosté, je $\mathbb{N} \setminus f(\mathbb{N}) = \emptyset$

$$f(n) = n+1 \quad n \in \mathbb{N}$$

je prosté, ale $f(\mathbb{N}) \neq \mathbb{N}$

7

a) $(0,1) \cap \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}$ spot.

b) $(0,1)$ nespoč.

$(0,1) \cap \mathbb{Q}$ spot. $\} (0,1) \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nespoč.

jinak by $(0,1)$ byl sjednocením 2 spot, což je spor.

c) $\subseteq \mathbb{N}$ spot.

d) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ spot.

$(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times \mathbb{N}$ spot. $\rightarrow$ spot.

e) $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{Q} \rightarrow$ NEspot.

f) $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow$ sjúčin spot. $\rightarrow$ spot.

g) $\mathbb{R} \times \{1\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{Q} \rightarrow$ NEspot.

$\uparrow$
NEspot.

h) kart. sjúčin spot. $\rightarrow$ spot.

i) lze převést na 1. příklad $\rightarrow$ NEspot.

zobrazení $g_A: \mathbb{N} \rightarrow A$, které je „na“. Definujme zobrazení $\psi: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \bigcup \mathcal{A}$ předpisem $\psi(n, m) = g_{f(n)}(m)$. Zobrazení ψ je „na“. Pro každé $x \in \bigcup \mathcal{A}$ totiž existuje $A \in \mathcal{A}$ takové, že $x \in A$. Existují tedy $n, m \in \mathbb{N}$ taková, že $f(n) = A$ a $g_A(m) = x$. Potom $\psi(n, m) = g_{f(n)}(m) = g_A(m) = x$.

Podle Lemmat 1.6.15 a 1.6.18(a) je množina $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ spočetná, a tedy existuje zobrazení h množiny $\mathbb{N}$ na množinu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (Lemma 1.6.18(b)). Potom je zobrazení $\psi \circ h$ zobrazením množiny $\mathbb{N}$ na množinu $\bigcup \mathcal{A}$, což podle Lemmatu 1.6.18(b) dokazuje spočetnost množiny $\bigcup \mathcal{A}$.

(c) Podobně jako v důkazu bodů (b) a (c) Věty 1.6.17 stačí dokázat, že kartézský součin dvou spočetných množin A a B je spočetný. Kartézský součin $A \times B$ je roven sjednocení $\bigcup_{a \in A} \{a\} \times B$. Zřejmě platí $\{a\} \times B \approx B$. Množina $A \times B$ je tedy spočetným sjednocením spočetných množin a podle (b) je tedy spočetná.

(d) Necht A je spočetná množina a $f: A \rightarrow B$ je zobrazení. Víme z Lemmatu 1.6.16, že platí $f(A) \leq A$. Protože $A \leq \mathbb{N}$, dostáváme podle Věty 1.6.3(b) $f(A) \leq \mathbb{N}$. Odtud plyne podle (a) spočetnost $f(A)$. ■

1.6.20. Příklad. Dokažte, že množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$ je spočetná.

Řešení. Množina $\mathbb{Z}$ je spočetná, neboť je sjednocením množiny kladných čísel, množiny záporných čísel a jednoprvkové množiny obsahující číslo 0. Množina $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ je tedy podle Věty 1.6.19(c) spočetná. Zobrazení $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ definované předpisem $f(p, q) = pq^{-1}$ zobrazuje $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ na $\mathbb{Q}$. Podle Věty 1.6.19(d) je množina $\mathbb{Q}$ spočetná. ♣

1.6.21. Příklad. Necht $\mathcal{J}$ je disjunktní systém neprázdných otevřených intervalů v $\mathbb{R}$. Dokažte, že potom je systém $\mathcal{J}$ spočetný.

Řešení. Pro každé $J \in \mathcal{J}$ nalezneme racionální číslo $q_J \in J$. Pak je zobrazení definované předpisem $J \mapsto q_J$, $J \in \mathcal{J}$, prostým zobrazením množiny $\mathcal{J}$ do spočetné množiny $\mathbb{Q}$, tedy $\mathcal{J}$ je také spočetná. ♣

1.6.22. Příklad. Necht A je nekonečná množina. Dokažte, že potom A obsahuje nekonečnou spočetnou podmnožinu.

Řešení. Definujme induktivně posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ následovně. Zvolme $a_1 \in A$ libovolně. Předpokládejme, že pro $n \in \mathbb{N}$ jsme již definovali prvky $a_1, \dots, a_n$. Množina $A \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ je neprázdná, neboť A je nekonečná. Prvek a_{n+1} zvolme libovolně z této množiny. Množina $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ je nekonečná dle Věty 1.6.14, a tím je důkaz proveden. ♣

1.6.23. Poznámka. Množina $\mathbb{R}$ je nespočetná. Důkaz provedeme až v Příkladu 3.8.9 a jiným způsobem v paragrafu 10.10.30.

l)

zavedeme množiny

S_1 slova délky 1

S_2 2 atd.

$\forall S_i$ je spoč. (točence konečné),

$$|S_1| = 42, \quad |S_2| = 42 \times 42)$$

spoč. sjednocení kon. je spoč

e)

NE spoč.

stačí uvážovat pol. 0 a 1 a 1. příklad

m)

spoč

→ jako $\mathbb{N}^2$

n)

nespoč

jako $2^{\mathbb{N}}$

8

$$a) f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow \text{bijekce}$$

$$b) (0,1) \rightarrow (0,\infty)$$

$$f(x) = -\ln(x) \quad \text{bijekce}$$

$$(0,\infty) \rightarrow (1,\infty)$$

$$f(x) = x+1$$

bijekce

9

$$a) A = [0,1) \quad B = (0,1) \quad A \setminus B = \{0\}$$

$$b) A = \mathbb{Q} \quad B = \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q} \quad A \setminus B = \mathbb{Q}$$

$$c) A = \mathbb{R} \quad B = [0,\infty) \quad A \setminus B = (-\infty,0)$$

10

potřebujeme najít 2 probr. zobra.

$$f(x) = x \quad f: (0,1) \rightarrow [0,1]$$

$$g(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{2} \quad g: [0,1] \rightarrow (0,1)$$

11

X konečná množina

(2)

$$|X| = n \in \mathbb{N}$$

pro $k \in \mathbb{N}_0$, $k \leq n$ označeno

$$\binom{X}{k} = \{ A \subseteq X, |A| = k \}$$

Pro k platí: $\left| \binom{X}{k} \right| = \binom{|X|}{k}$

↑
počet podmnožin velikosti k

= další způsob, jak zvolit k prvků $\rightarrow$ kombinací číslo

12

$A_n \subseteq \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, jsou množiny. Pak

10

$$(a) \{z \in \mathbb{C} \mid \{n \in \mathbb{N} \mid z \notin A_n\} \text{ je konečný}\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

$$(b) \{z \in \mathbb{C} \mid \{n \in \mathbb{N} \mid z \in A_n\} \text{ není konečný}\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

(a) $\{n \in \mathbb{N} \mid z \notin A_n\}$ je konečný

tedy $\exists n_0 : \forall k \geq n_0 \quad z \in A_k$

↓

tedy $\bigcap_{k=n_0}^{\infty} A_k$

obstojíme a zároveň máme n_0

→ $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$

(b) $\{n \in \mathbb{N} \mid z \in A_n\}$ není konečný

(Pozn. z se vyskytuje v ∞ mnoha A_n
ale nic to říká o množině, kde z není)

$$\forall n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists k \geq n_0 \quad z \in A_k$$

$$\bigcup_{k=n_0}^{\infty} A_k$$

↓

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

platí to pro n_0 , tedy nutno obdržet všechny