2. cvičení - mohutnost

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php
kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Definice 1.
- Říkáme, že množiny A, B *mají stejnou mohutnost*, jestliže existuje **bijekce** A na B, píšeme $A \approx B$;
- Říkáme, že množina A *má mohutnost menší nebo rovnou mohutnosti množiny* B, jestliže existuje **prosté zobrazení** A do B. Píšeme $A \preceq B$; relaci „$\preceq$“ říkáme *subvalence*.

Definice 2. Řekneme, že množina X je

- *konečná*, jestliže je prázdná nebo existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $X \approx \{1, \dots, n\}$;
- *nekonečná*, jestliže není konečná;
- *spočetná*, jestliže je konečná nebo má stejnou mohutnost jako $\mathbb{N}$.
- *nespočetná*, pokud není spočetná.

Věta 3 (Cantor–Bernstein)**.** Nechť A, B jsou množiny takové, že A má mohutnost menší nebo rovnu než B a B má mohutnost menší nebo rovnu než A. Pak mají stejnou mohutnost.

Věta 4 (Cantor)**.** Nechť A je množina. Pak $A \prec P(A)$.

Příklady

1. Ukažte, že pro konečnou množinu X je mohutnost její potenční množiny $|P(X)| = 2^{|X|}$.

2. Ukažte, že

   (a) $\mathbb{N}_0 \approx \mathbb{N}$.

   (b) $\mathbb{Z} \approx \mathbb{N}$.

   (c) zobrazení $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je prosté: $f(n, m) = (n + m)^2 + n$
   (Testujte $(n' + m' + 1)^2) > (n' + m')^2 + n'$.)

   (d) $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$.

   (e) $\mathbb{Q} \approx \mathbb{N}$.

   (f) $(0, 1) \approx \mathbb{R}$.

   (g) $\mathbb{N} \preceq \mathbb{R}$ a $\mathbb{N} \not\approx \mathbb{R}$.

3. Nechť množiny A_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou spočetné. Ukažte, že pak $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ je spočetná.

4. Nechť množiny A, B jsou spočetné. Ukažte, že pak $A \times B$ je spočetná.

5. Ukažte, že každá nekonečná podmnožina spočetné množiny má stejnou mohutnost jako $\mathbb{N}$.

6. Nechť $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

ANO – NE Je-li $f(\mathbb{N})$ konečná, není f prosté.

ANO – NE Je-li $f(\mathbb{N})$ nekonečná, je f prosté.

ANO – NE Je-li $\mathbb{N} \setminus f(\mathbb{N}) = \emptyset$, je f prosté.

ANO – NE Je-li f prosté, je $\mathbb{N} \setminus f(\mathbb{N}) = \emptyset$.

7. Rozhodněte (a krátce zdůvodněte), zda jsou následující množiny spočetné nebo nespočetné:

   (a) $(0,1) \cap \mathbb{Q}$

   (b) $(0,1) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$

   (c) množina všech sudých $\mathbb{N}$ čísel;

   (d) $\mathbb{N}^3$

   (e) $\mathbb{C}$

   (f) množina všech bodů v rovině s racionálními souřadnicemi;

   (g) $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$

   (h) $N \times \{2,3\}$

   (i) množina takových reálných čísel, která mají za desetinnou čárkou jen 1 a 9.

   (j) nějaký disjunktní systém neprázdných otevřených intervalů v $\mathbb{R}$

   (k) množina všech slov, slovem rozumíme konečnou (ale libovolně dlouhou) sekvenci písmen;

   (l) množina všech nekonečných posloupností přirozených čísel

   (m) množina všech funkcí $f : \{0,1\} \to \mathbb{N}$

   (n) množina všech funkcí $f : \mathbb{N} \to \{0,1\}$

8. Ukažte, že následující množiny mají stejnou mohutnost:

   (a) $(0,1)$ a $(1,\infty)$

   (b) $(0,1)$, $(0,\infty)$ a $(1,\infty)$

9. Najděte příklad dvou různých nespočetných množin A a B tak, aby $A \setminus B$ byla

   (a) konečná

   (b) spočetná (nekonečná)

   (c) nespočetná

10. Pomocí Cantor-Bernsteinovy věty ukažte, že $(0,1)$ a $[0,1]$ mají stejnou mohutnost.

11. Buď X konečná množina, $|X| = n \in \mathbb{N}$. Označme pro $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k \leq n$,

$$\binom{X}{k} = \{A \subseteq X;\, |A| = k\}\,.$$

   Ukažte, že platí

$$\left|\binom{X}{k}\right| = \binom{|X|}{k}\,.$$

12. Nechť $A_n \subset \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, jsou množiny. Ukažte, že platí

$$\{z \in \mathbb{C}; \{n \in \mathbb{N}; z \notin A_n\} \text{ je konečná}\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k,$$

$$\{z \in \mathbb{C}; \{n \in \mathbb{N}; z \in A_n\} \text{ není konečná}\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$