3. cvičení - logika a zobrazení

`https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php`
kuncova@karlin.mff.cuni.cz

1 Výroky

Úloha 1. Doplňte tabulku výroků

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	0	1	1

Úloha 2. Doplňte tabulku výroků

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A \vee \neg B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge \neg B$
1	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1

Úloha 3. Doplňte tabulku výroků

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg(A \Rightarrow B)$	$A \wedge \neg B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
1	1	0	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0	1	1

Úloha 4. Sestavte tauotologie z výroků ve cvičení 1.-3. Kolik jste jich našli?
Řešení:

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg(A \vee \neg B)$$

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$$

$$\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$$

$$(\neg B \Rightarrow \neg A) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$$

$$((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow B)$$

Úloha 5. Nechť M je množina osob v posluchárně a nechť $W(x, y)$ znamená: osoba $x \in M$ zná příjmení osoby $y \in M$. Přeformulujte následující výroky do češtiny a pak zkoumejte jejich platnost. Plynou některé výroky z ostatních? (Pozn.: x a y mohou být stejné.)

Příklad: $\exists y \in M \, \exists x \in M : W(x, y)$ lze zformulovat jako: existuje alespoň jedna osoba y a jedna osoba x, že x zná příjmení osoby y.

Volněji: je tu alespoň jeden člověk y a jeho kamarád*ka x, který*á ho zná příjmením. Výrok bude nejspíš pravdivý.

1. $\forall x \in M\, \forall y \in M : W(x, y)$

   Úplně všichni v posluchárně se navzájem znají. To nebude pravda.

2. $\forall x \in M\, \exists y \in M : W(x, y)$

   Každý člověk tu zná něčí příjmením. Jelikož x se může rovnat y, tak pravda.

3. $\forall y \in M\, \exists x \in M : W(x, y)$

   Každý tu má někoho, kdo ho zná příjmením. Asi pravda, známe své vlastní příjmení a navíc se navzájem trochu známe (třeba z Albeře).

4. $\exists x \in M\, \forall y \in M : W(x, y)$

   Je tu někdo, kdo zná všechna příjmení. Také nebude pravda.

5. $\exists y \in M\, \forall x \in M : W(x, y)$

   Je tu někdo, jehož příjmení všichni znají. Všichni by měli znát cvičící, takže pravda.

Úloha 6. Uvažujme výrok: Nechť $n \in \mathbb{N}$. Jestliže n^2 je liché, pak n je také liché. Jaké tvrzení budeme dokazovat při důkazu

1. přímo; Jestliže n^2 je liché, pak n je také liché.

2. nepřímo; Jestliže n je sudé, pak n je také sudé.

3. sporem: n^2 je liché a zároveň n je sudé.

Zkuste tvrzení dokázat alespoň jednou metodou.

Úloha 7. Dokažte

1. $\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |1/\sqrt{n}| < \varepsilon$

2. $\forall k \in \mathbb{N}\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \ln n \geq k$

Úloha 8. Znegujte následující výrok a tuto negaci dokažte

1. $\exists A \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |(-1)^n - A| < \varepsilon$

2. $\forall k \in \mathbb{N}\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : (-1)^n n \geq k$

---

3. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Příklady

1. Z definice určete

(7.1) (a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Řešení: chceme dokázat, že: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : \left|\frac{1}{\sqrt{n}} - 0\right| < \varepsilon$. Jelikož $n > 0$, můžeme absolutní hodnotu přepsat na: $\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$, což znamená, že potřebujeme zajistit, aby $\frac{1}{\varepsilon} < \sqrt{n}$. Tedy stačí zvolit $n_0 := [\frac{1}{\varepsilon^2} + 1]$ (horní celá část), pak $n_0 > \frac{1}{\varepsilon^2}$, tedy pro $n \geq n_0 > \frac{1}{\varepsilon^2}$ platí, že $\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$.

(7.2) (b)

$$\lim_{n\to\infty} \log n$$

Řešení: Ze znalostí základních funkcí odhadneme, že limita bude asi ∞. Takže užijeme definici nevlastní limity:

Definice 1. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu ∞ (resp. $-\infty$), jestliže platí:

$$\forall k \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ n \geq n_0 :\ a_n \geq k$$

(resp.

$$\forall k \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ n \geq n_0 :\ a_n \leq k).$$

Tedy zvolme $k \in \mathbb{R}$ a hledejme n_0, aby pro $\forall n \geq n_0$ byla $a_n \geq k$. Logaritmus je rostoucí záležitost, stačí tedy najít vhodné n_0, zbytek bude platit triviálně. Dosadíme-li n_0 do předpisu, získáme:

$$\ln n_0 \geq k.$$

Vypustíme na to exponencielu, která je taktéž rostoucí funkcí, tedy nezmění znaménko nerovnosti:

$$n_0 \geq e^k.$$

Nyní už jsme hotovi, stačí volit $n_0 := [e^k] + 1$ a z předchozích úvah plyne vše potřebné.

2. Spočtěte

(a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^5 + 2n - 7}{n^5 - 6n^2 + 4}$$

(3)

	inf	sup
(a)	1	∞
(b)	0	2
(c)	0	1
(d)	2	∞
(e)	$-\infty$	∞
(f)	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
(g)	0	1
(h)	0	1
(i)	-1	1
(j)	$-\infty$	∞

(4) $(0;1)$

(5) další papír

8,1

(6) (a) negace

$$\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists \varepsilon \quad \forall n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 :$$

$$|(-1)^n - A| \geq \varepsilon$$

důkaz: fixujme $A \in \mathbb{R}$, zvolme $\varepsilon = \frac{1}{4}$, fixujme n_0. Zvolme n buď n_0 nebo n_0+1, jedna z těchto voleb je správná. Kdyby ne, tak

$$|1-A| < \frac{1}{4} \quad \& \quad |-1-A| < \frac{1}{4}$$

což je spor.

8.2. (6)(b) negace $\exists k \in \mathbb{N}\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 : \ (-1)^n n < k$

Dk: zvolme k lib., třeba $k = 128$, fixujme n_0.

Zvolme $n \geq n_0$ lib, liché, pak

$-1 \cdot n < k$, neb $k \in \mathbb{N}$.

(7) (a) $\sup A \cup B = \max \{\sup A, \sup B\}$

$\inf A \cup B = \min \{\inf A, \inf B\}$

(b) $\sup A \cap B \leq \min \{\sup A, \sup B\}$

$\inf A \cap B \geq \max \{\inf A, \inf B\}$

(c) $\sup A \setminus B \leq \sup A$

$\inf A \setminus B \geq \inf A$

(d) $\sup A \triangle B \leq \max \{\sup A, \sup B\}$

$\inf A \triangle B \geq \min \{\inf A, \inf B\}$

(e) $\sup(-A) = -\inf A$

$\inf(-A) = -\sup A$

(f) $\sup A+B = \sup A + \sup B$

$\inf A+B = \inf A + \inf B$

(g) $\sup A-B = \sup A - \inf B$

$\inf A-B = \inf A - \sup B$

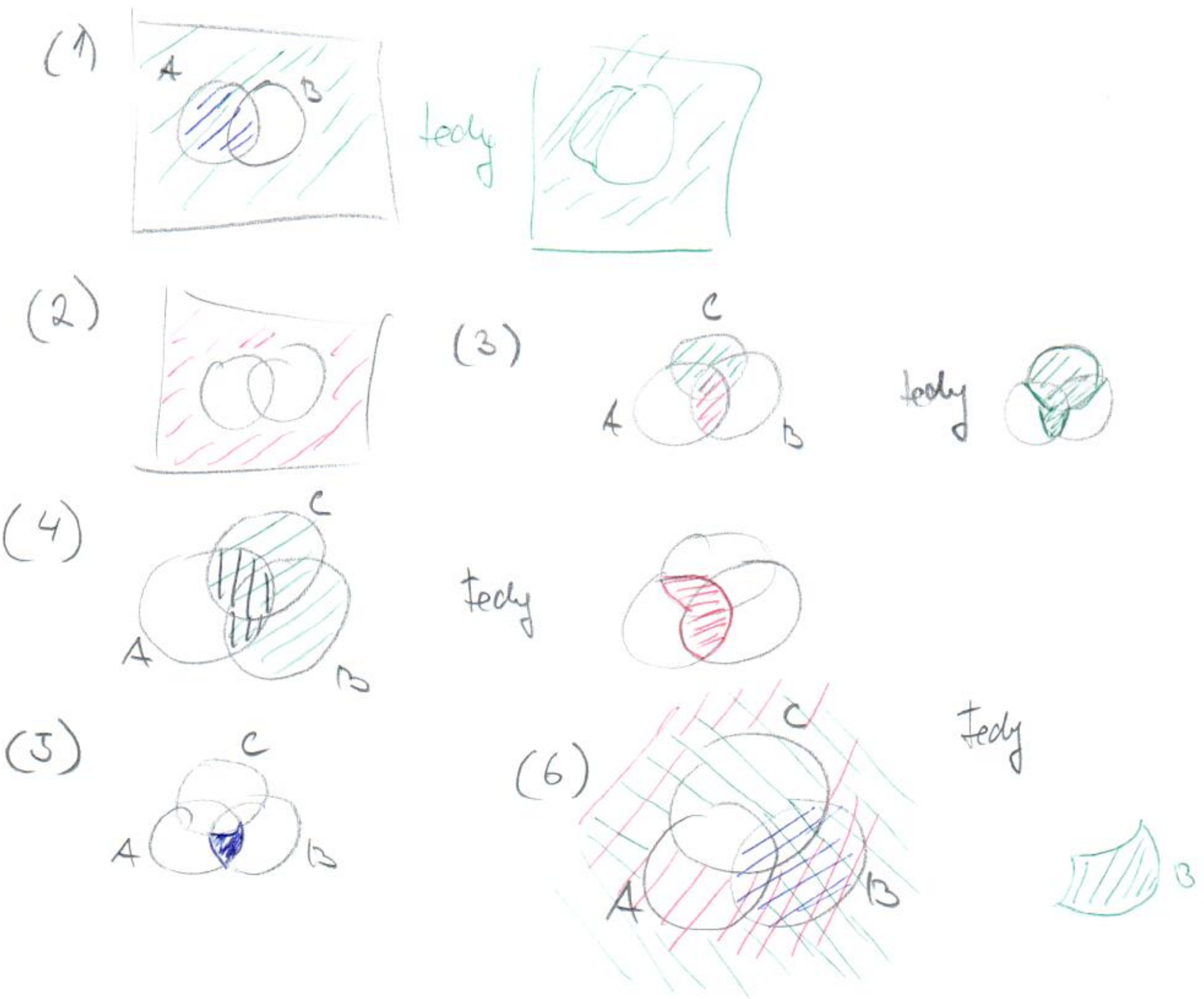
(h) $\sup A \cdot B = \max \{\sup A \cdot \sup B,\ \sup A \cdot \inf B,$
$\inf_A \cdot \sup B,\ \inf_A \cdot \inf_B\}$

$\inf A \cdot B = \min \{ \quad - u - \quad \}$

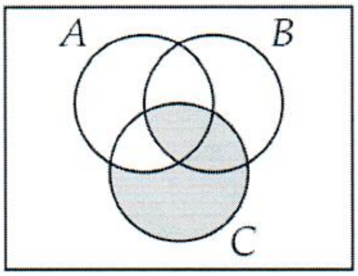
2 Množiny a relace

Úloha 9. Nechť A, B, C jsou množiny. Načrtněte Vennovy diagramy pro

1. $A \cap B^c$
2. $(A \cup B)^c$
3. $(A \cap B) \cup C$
4. $A \cap (B \cup C)$
5. $(A \cap B) \setminus C$
6. $A^c \cap B \cap C^c$



Úloha 10. Najděte předpis pro následující diagram



Source 1: `http://discrete.openmathbooks.org/pdfs/dmoi-tablet.pdf`

$(B \cap C) \cup (C \cap A^c)$

Úloha 11. Ukažte, že pro symetrický rozdíl $A \Delta B$ množin A a B platí

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

(15) $A \triangle B$ 5

Def:

$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

"$\subseteq$"

nechť $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

BÚNO $x \in A$ & $x \notin B$

pak $x \in (A \cup B)$ // $x \in A \subset A \cup B$

a $x \notin A \cap B$ neb $x \notin B$

pro $x \in (B \setminus A)$ analogicky

"$\supseteq$"

nechť $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

BÚNO $x \in B$ & $x \notin A \cap B$

pak $x \in B$

ale $x \notin A$ $\rightarrow$ $x \in B \setminus A$

Úloha 12. Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

1. $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$
2. $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$
3. $A \setminus B = C \Leftrightarrow A = B \cup C$
4. $X \times Y = Y \times X$

(4) (a) $A \cap B = A \overset{?}{\iff} A \subset B$

"$\Leftarrow$" ok

"$\Rightarrow$" chci: $x \in A \to x \in B$

mám: $A \cap B \subseteq A$

$A \subseteq A \cap B$

↳ to je: $x \in A \Rightarrow x \in A \,\&\, x \in B$, což stačí ✓

(b) $A \cup B = B \iff A \subset B$

"$\Leftarrow$" ok

"$\Rightarrow$" mám: $A \cup B \subseteq B$ $\to$ $x \in A \vee x \in B \Rightarrow x \in B$

$B \subseteq A \cup B$ ↓ to je ono ✓

chci $A \subset B$ $\to$ $x \in A \Rightarrow x \in B$ ✓

(c) $A \setminus B = C \iff A = B \cup C$

"$\Leftarrow$" chci $x \in A \setminus B \iff x \in C$

mám: $x \in A \iff x \in B \cup x \in C$

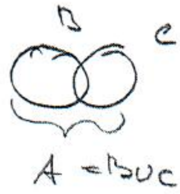
tedy chci ukázat: (1) $x \in A \,\&\, x \notin B \Rightarrow x \in C$ ✓

(2) $x \in C \Rightarrow x \in A \setminus B$

to nějak nejde

→ co když to není pravda?

protipříklad



$A = B \cup C$ $\not\Rightarrow$

$A \setminus B = C$

Definice 13. Nechť $A_1, \dots, A_n$ jsou množiny.

- Jejich *kartézským součinem* rozumíme množinu

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \{[a_1, \dots, a_n];\ \forall i \in \{1, \dots, n\} \colon a_i \in A_i\},$$

  tedy množinu uspořádaných n-tic $[a_1, \dots, a_n]$.

- *Binární relací* R mezi množinami A a B rozumíme libovolnou podmnožinu kartézského součinu $A \times B$. Často také hovoříme o *relaci mezi* A *a* B nebo o *relaci z* A *do* B. Příslušnost uspořádané dvojice $[a, b]$ do relace R značíme $[a, b] \in R$ nebo aRb.

Úloha 14. Nerovnost mezi reálnými čísly „$\leq$“ tvoří binární relaci na $[0, 1]$. Znázorněte tuto relaci graficky.

(14)

(4)(a) $X \times Y \neq Y \times X$

neb $\{1,2,3\} \times \{0,-1\} \neq \{0,-1\} \times \{1,2,3\}$

$\downarrow$ $[1,0],\ [1,-1],\ [2,0]\ldots$

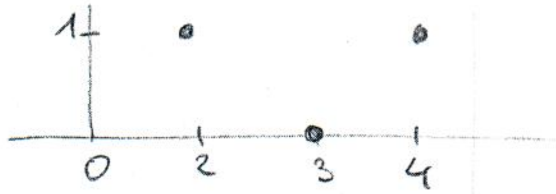
$\downarrow$ $[0,1],\ [0,2],\ [0,3]\ldots$

(5) $p(X)$ → mna podmnožin

když je něco podmna, lze znázornit funkcí $\begin{cases} 1 & \text{je tam} \\ 0 & \text{není} \end{cases}$

tedy pro $X = \{2,3,4\}$

se podmna $\{2,4\}$ znázorní



tedy $\forall x \in X$ lze přiřadit buď 0 nebo 1 (tedy 2 možnosti). A jejich počet je $2^{|X|}$

(6) $f(x) = x^2$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

mna	obraz
$[0,4]$	$[0,16]$
$[-4,0]$	$[0,16]$
$[-4,4]$	$[0,16]$

mna	vzor
$[0,4]$	$[-2,2]$
$[-4,0]$	$\{0\}$
$[-4,4]$	$[-2,2]$

Úloha 15. Nechť A je množina všech podmnožin množiny $\{1, 2\}$ a relace R je býti vlastní podmnožinou, tedy $X\,R\,Y$ právě tehdy, když $X \subseteq Y$ a zároveň $X \neq Y$. Napište relaci R jako množinu uspořádaných dvojic.

Definice 16. Nechť R je relace na množině X. Řekneme, že R je

- *symetrická*, jestliže
$$\forall x, y \in X;\ x\,R\,y \Rightarrow y\,R\,x$$
- *antisymetrická*, jestliže
$$\forall x, y \in X;\ x\,R\,y \ \&\ y\,R\,x \Rightarrow x = y$$
- *tranzitivní*, jestliže
$$\forall x, y, z \in X;\ x\,R\,y \ \&\ y\,R\,z \Rightarrow x\,R\,z$$
- *reflexivní*, jestliže
$$\forall x \in X;\ x\,R\,x$$

Úloha 17. Určete, zda následující relace jsou symetrické, antisymetrické, reflexivní a tranzitivní

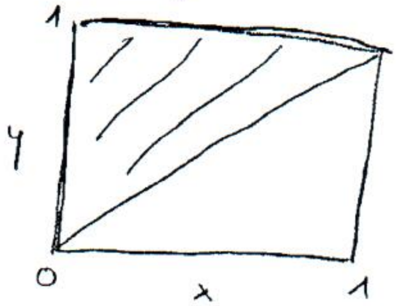
1. A je množina lidí, R je relace "býti rodičem"
2. A je množina celých čísel, $i\,R\,j$ právě tehdy, když $|i - j| = 1$.
3. $A = \mathbb{N}$, $i\,R\,j$ právě tehdy, když $i \cdot j$ je sudé.

15

(7.3) (1) "$\leq$" je bin. relace na $[0,1]$. 1

Znázorněte ji graficky

$x \leq y$



(13) $A = \mathcal{P}(\{1,2\})$

$A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

$R = \{[\emptyset, \{1\}], [\emptyset, \{2\}], [\emptyset, \{1,2\}],$
$[\{1\}, \{1,2\}], [\{2\}, \{1,2\}]\}$

(14) (a) A lidi, R – "být rodičem"

17

ne sym., anti..., tranz., reflex

je antisym.

(b) $A = \mathbb{Z}$, iRj $|i-j| = 1$

ano sym.

ne tranz., antisym., reflex.

(c) $A = \mathbb{N}$, iRj $i \cdot j$ sudé

ano sym

ne tranz., antisym., reflex

3 Zobrazení

Definice 18. Binární relaci $F \subset A \times B$ nazýváme *zobrazením* neboli *funkcí* množiny A do množiny B (a zpravidla značíme $F : A \to B$), jestliže platí

$$\forall x \in A \; \forall y_1, y_2 \in B\colon \; (([x, y_1] \in F \;\&\; [x, y_2] \in F) \Rightarrow (y_1 = y_2)).$$

Jsou-li A, B množiny a $F \subset A \times B$ je zobrazení, pak tento fakt značíme symbolem $F : A \to B$.

Úloha 19. Nechť $A = [0, 1]$, $B = [0, 2]$. Rozhodněte, která z následujících relací je grafem nějakého zobrazení:

1. $M_1 = \{[x, y] \in A \times B;\; x^2 + y^2 = 1\}$
2. $M_1 = \{[x, y] \in A \times B;\; y - x = 0\}$
3. $M_1 = \{[x, y] \in A \times B;\; x^2 + (y-1)^2 = 1\}$

(7.3)(5)

$A = [0, 1], \quad B = [0, 2]$

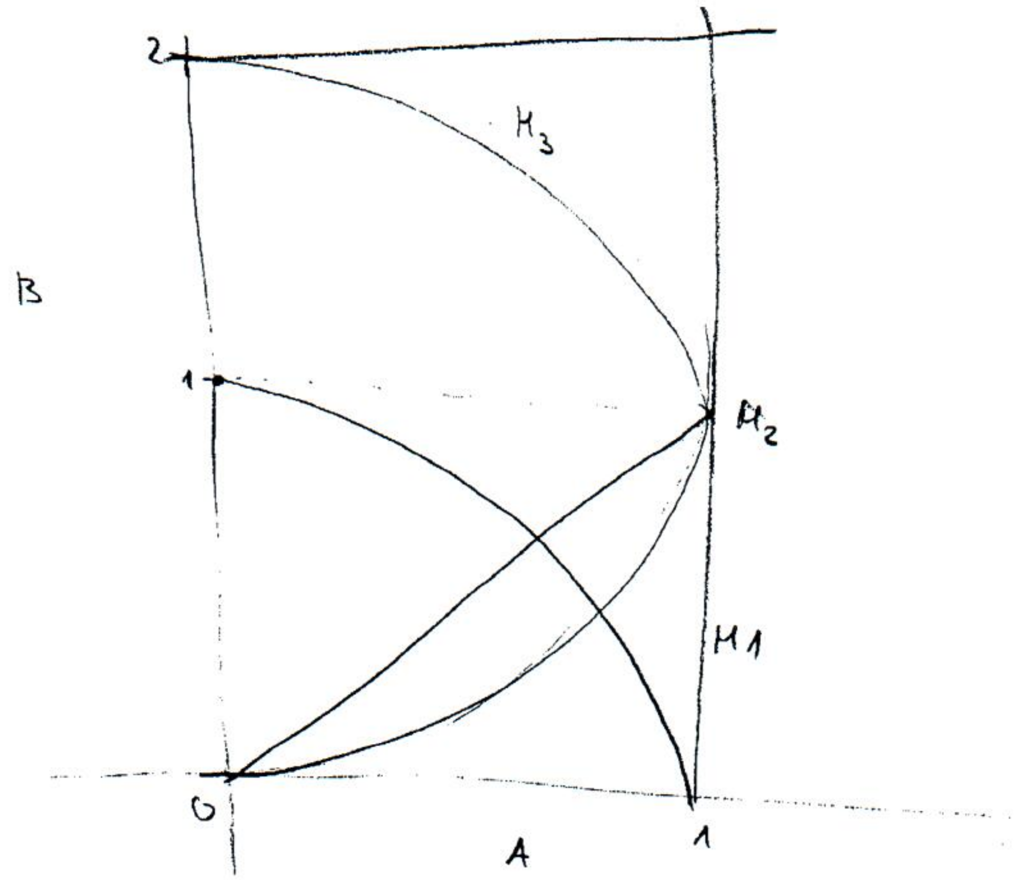
②

Která z násl. relací je grafem zobrazení?

$M_1 = \{ [x, y] \in A \times B \; ; \; x^2 + y^2 = 1 \}$ ano

$M_2 = \{ \; ; \; y - x = 0 \}$ ano

$M_3 = \{ \; ; \; x^2 + (y-1)^2 = 1 \}$ ne



Úloha 20. Dokažte, že skládání zobrazení je asociativní operace, ale není komutativní.

20 (1a) skládání zobrazení je asociativní, ale nikoli komut. operace

4

$$W \xrightarrow[f]{} X \xrightarrow[g]{} Y \xrightarrow[h]{} Z$$

- asociativní

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

mějme $w \in W$

$$(h(g))(f(w)) \stackrel{?}{=} h(g(f(w)))$$

$$h(g(f(w))) = h(g(f(w)))$$

- není komutativní

$$X \underset{f}{\overset{g}{\rightleftarrows}} X \qquad f \circ g \neq g \circ f$$

Protipříklad

$$f = x^2$$

$$g = 3x \qquad : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f(g(x)) = (3x)^2 = 9x^2$$

$$\neq$$

$$g(f(x)) = 3(x^2) = 3x^2$$

Definice 21. Nechť A a B jsou množiny a nechť $f : A \to B$ je zobrazení.

- Nechť $M \subset A$. Pak množinu
$$f(M) = \{y \in B;\ \exists x \in M\colon\ f(x) = y\}$$
nazýváme *obrazem množiny* M při zobrazení f.

- Nechť P je libovolná množina. Pak množinu
$$f^{-1}(P) = \{x \in A;\ f(x) \in P\}$$
nazýváme *vzorem množiny* P při zobrazení f.

Úloha 22. Nechť $f : X \to Y$ je zobrazení, nechť $A \subset X$ a $B \subset Y$. Platí, že
$$f^{-1}(f(A)) = A, \qquad f(f^{-1}(B)) = B \qquad ?$$
Platí některá z inkluzí $\subset$ či $\supset$?

Úloha 23. Nechť $f : X \to Y$ je zobrazení. Platí následující tvrzení? Platí alespoň jedna inkluze?

1. Pokud $A, B \subset X$, potom $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,
2. Pokud $A, B \subset X$, potom $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$,
3. Pokud $A, B \subset Y$, potom $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$,
4. Pokud $A, B \subset Y$, potom $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
5. Pokud $A, B \subset Y$, potom $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$.

(7) $f: A \to SPZ$

$g: RA \to RSPZ$

f

? přidáme "SPZ" → prázdné ?
nebo

$D_f = RA$

$H_f = RSPZ$

prosté, není na

inverz :((není prosté)

g

prosté

na

Značnost:

$|RA| = |RSPZ|$

inverze

$|RA| = |RSPZ|$ ✓

(8) $f: X \to Y$, $X \supseteq A$, $Y \supseteq B$

VZORY A OBRAZY

(a) $f^{-1}(f(A)) \overset{?}{=} A$

NE $f = x^2$ $A = [0,2]$

$f^{-1}(f(A)) = [-2,2]$

(b) $f(f^{-1}(B)) \overset{?}{=} B$

NE $B = [-4,4]$

$f^{-1}(B) = [0,2]$

$f(f^{-1}(B)) = [0,4]$

$B \supseteq f(f^{-1}(B))$

(a)

platí $A \subseteq f^{-1}(f(A))$

chci $x \in A \Rightarrow x \in f^{-1}(f(A))$

sporem: $x \in A$ & $x \notin f^{-1}(f(A))$

↳ $x \in f(A)$ ↳ $\forall y \in f(A): f(x) \neq y$

$= \exists y \in f(A): f(x) = y$ ↯

(b) analogicky $y \in f(f^{-1}(B))$, chci $y \in B$ → sporem: $y \notin B$

↳ $\exists x \in f^{-1}(B): f(x) = y$ & $y \notin B$

→ $f(x) \notin B$

tedy zatím máme: $x \in f^{-1}(B)$ & $f(x) \notin B$

$\exists z \in B$ $f(x) = z \to f(x) \in B$

↯

Věta 3 Nechť $f: A \to B$, $M_1, M_2 \subset D(f)$, P_1, P_2 lib.

Pak (1) $f(M_1 \cup M_2) = f(M_1) \cup f(M_2)$

(2) $f_{-1}(P_1 \cup P_2) = f_{-1}(P_1) \cup f_{-1}(P_2)$

Dk. (1) "$\subseteq$"

zvolme $y \in f(M_1 \cup M_2)$, chceme $y \in f(M_1) \cup f(M_2)$, což je
$y \in f(M_1) \vee y \in f(M_1)$

neb $y \in f(M_1 \cup M_2)$ tak $\exists x \in M_1 \cup M_2 : f(x) = y$

tedy buď $x \in M_1$ $\vee$ (vylučovací) nebo $x \in M_2$

(a) $x \in M_1$, pak $y = f(x) \in f(M_1) \subset f(M_1) \cup f(M_2)$

nebo (b) $x \in M_2$ $y = f(x) \in f(M_2) \subset f(M_1) \cup f(M_2)$

"$\supseteq$" zvolme $y \in f(M_1) \cup f(M_2)$

pak $y \in f(M_1) \vee y \in f(M_2)$

nechť (a) $y \in f(M_1)$, tedy $\exists x \in M_1 : y = f(x)$.

pak $x \in M_1 \cup M_2$

tedy $y = f(x) \in f(M_1 \cup M_2)$.

(b) $y \in f(M_2)$, tedy $\exists x \in M_2 : y = f(x)$.

zbytek stejně.

(2) "$\subseteq$"

zvolme $x \in f_{-1}(P_1 \cup P_2)$, chceme $x \in f_{-1}(P_1) \cup f_{-1}(P_2)$

což jest $x \in f_{-1}(P_1) \vee f_{-1}(P_2)$

k tomuto x $\exists y \in P_1 \cup P_2$ tak, že $f(x) = y$

pak $y \in P_1$ a tedy $x \in f_{-1}(P_1)$

nebo $y \in P_2$ $x \in f_{-1}(P_2)$.

"$\supseteq$" zvolme $x \in f_{-1}(P_1) \cup f_{-1}(P_2)$

Pak pro $x \in f_{-1}(P_1)$ $\exists y \in P_1 : f(x) = y$

ale pak $y \in P_1 \cup P_2$ a $x \in f_{-1}(P_1 \cup P_2)$

nebo $x \in f_{-1}(P_2)$: $\exists y \in P_2$: $f(x) = y$

pak $y \in P_2 \cup P_1$ a $x \in f_{-1}(P_1 \cup P_2)$

Věta 3 $f: A \to B$, $M_1, M_2 \subset D(f)$, P_1, P_2 lib

(3) $f(M_1 \cap M_2) \subset f(M_1) \cap f(M_2)$

(4) $f_{-1}(P_1 \cap P_2) = f_{-1}(P_1) \cap f_{-1}(P_2)$

(5) $f(M_1 \setminus M_2) \supset f(M_1) \setminus f(M_2)$

(6) $f_{-1}(P_1 \setminus P_2) = f_{-1}(P_1) \setminus f_{-1}(P_2)$

Dk. (3) zvolme $y \in f(M_1 \cap M_2)$, chceme $y \in f_1(M_1) \cap f(M_2)$

tedy $y \in f_1(M_1)$ & $y \in f(M_2)$

neb $y \in f(M_2 \cap M_1)$ tak $\exists x \in M_1 \cap M_2 : f(x) = y$

neb $x \in M_1$, tak $y = f(x) \in f(M_1)$

& $x \in M_2$ $y = f(x) \in f(M_2)$,

což jsme chtěli

(4) "$\subseteq$"

zvolme $x \in f_{-1}(P_1 \cap P_2)$, chceme $x \in f_{-1}(P_1) \cap f_{-1}(P_2)$

$\iff x \in f_{-1}(P_1)$ & $x \in f_{-1}(P_2)$

pak $\exists y \in P_1 \cap P_2 : f(x) = y$

ale pak $y \in P_1$ $f(x) = y$ tedy $x \in f_{-1}(P_1)$

& $y \in P_2$ $x \in f_{-1}(P_2)$

"$\supseteq$"

nechť $x \in f_{-1}(P_1) \cap f_{-1}(P_2)$ chceme $x \in f_{-1}(P_1 \cap P_2)$

pak $\exists y \in P_1$ $f(x) = y$

$\exists z \in P_2$ $f(x) = z$

ale f je zobrazení, tedy $y = z$, tedy $\exists y \in P_1 \cap P_2 :$

$f(x) = y$. $\square$

(5) nechť $y \in f(M_1) \setminus f(M_2)$, chceme $y \in f(M_1 \setminus M_2)$

tedy $\exists x \in M_1 : f(x) = y$

ale $\forall t \in M_2$ $f(t) \neq y$

pak $x \notin M_2$. Tedy $x \in M_1 \setminus M_2$ a $f(x) = y$ $\square$

(6) "$\subseteq$"

zvolme $x \in f_{-1}(P_1 \setminus P_2)$, chceme $x \in f_{-1}(P_1) \setminus f_{-1}(P_2)$

tedy $\exists y \in P_1 \setminus P_2 : \quad f(x) = y$

zjevně pak $y \in P_1$ a $x \in f_{-1}(P_1)$

ukažme, že $x \notin f_{-1}(P_2)$. kdyby ano, pak

$\exists z \in P_2 : \quad f(x) = z$

ale pak $y = f(x) = z$ ↯

"$\supseteq$"

nechť $x \in f_{-1}(P_1) \setminus f_{-1}(P_2)$. Chceme $x \in f_{-1}(P_1 \setminus P_2)$.

pak $\exists y \in P_1 : \quad f(x) = y$

$\forall z \in P_2 : \quad f(x) \neq z$

pak $y \in P_1 \setminus P_2$ a $x \in f_{-1}(P_1 \setminus P_2)$

Definice 24. Nechť A a B jsou množiny a nechť $f : A \to B$ je zobrazení.

(1) Řekneme, že f je *prosté* (*injektivní*), jestliže

$$\forall x, y \in A\colon\ (f(x) = f(y) \ \Rightarrow\ x = y).$$

(2) Řekneme, že f je *„na“* (*surjektivní*), jestliže

$$\forall y \in B\ \exists x \in A\colon\ f(x) = y.$$

(3) Řekneme, že f je *bijekce* (*vzájemně jednoznačné*), jestliže je zároveň prosté a „na“.

Úloha 25. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je zobrazení definované vzorcem $f(x) = x^2$. Určete vzory a obrazy množin $[0, 4]$, $[-4, 0]$ a $[-4, 4]$. Je zobrazení f prosté, na? Existuje inverzní zobrazení? Změní se tyto odpovědi, když budeme brát zobrazení $g : [0, 1] \to [0, 1]$ dané stejným předpisem $g(x) = x^2$?

(4)(a) $X \times Y \neq Y \times X$

neb $\{1,2,3\} \times \{0,-1\} \neq \{0,-1\} \times \{1,2,3\}$

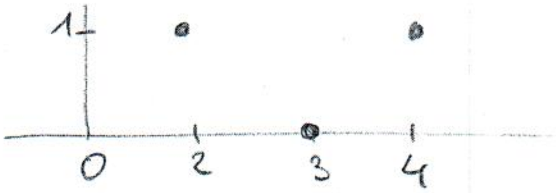
$[1,0], [1,-1], [2,0] \ldots$ $\quad$ $[0,1], [0,2], [0,3] \ldots$

(5) $p(X)$ → mna podmnožin

zda je něco podmna, lze znázornit funkcí $\begin{cases} 1 & \text{je tam} \\ 0 & \text{není} \end{cases}$

tedy pro $X = \{2,3,4\}$

se podmna $\{2,4\}$ znázorní



tedy $\forall x \in X$ lze přiřadit buď 0 nebo 1 (tedy 2 možnosti). A jejich počet je $2^{|X|}$

(6) $f(x) = x^2$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

mna	obraz
$[0,4]$	$[0,16]$
$[-4,0]$	$[0,16]$
$[-4,4]$	$[0,16]$

f není prosté
nemá invers

mna	vzor
$[0,4]$	$[-2,2]$
$[-4,0]$	$\{0\}$
$[-4,4]$	$[-2,2]$

g  je prosté, má invers

Úloha 26. Najděte zobrazení, která zobrazují:

1. interval $[0, 1]$ na interval $[0, \infty)$,
2. interval $(0, 1)$ na interval $[0, 1]$,
3. interval $[a, b]$ na interval $[0, 1]$.

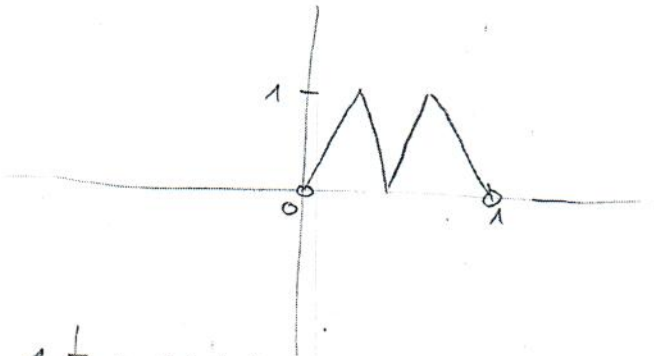
(10) $f(x) = \sin x$ $\qquad g(x) = x^2$

pak $\sin^2 x \neq \sin x^2$

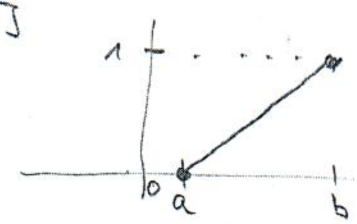
(11) (a) $[0,1]$ na $[0,\infty)$

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \cdot x & x \in [0,1) \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$

(b) $(0,1)$ na $[0,1]$



(c) $[a,b]$ na $[0,1]$



$y = px + q$

$$\begin{cases} 0 = pa + q \\ 1 = pb + q \end{cases}$$

pak $-1 = p(a-b)$ $\qquad p = \frac{1}{b-a}$

$$q = \frac{-1}{b-a} \cdot a$$

celkem $\qquad f(x) = \frac{1}{b-a} \cdot x + \frac{-a}{b-a}$