# 13. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/∼kuncova/, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

## 1

**Definice 1.** Nechť $(X,\rho)$ je metrický prostor. Řekneme, že $A \subset X$ je *hustá*, pokud $\overline{A} = X$.

Metrický prostor $(X,\rho)$ se nazývá *separabilní*, jestliže v něm existuje spočetná hustá podmnožina.

**Úloha 2.** (Příklad máme z: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf. Tamtéž opsána některá řešení.)

1. Ukažte, že $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ a $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ jsou separabilní.

   **Řešení:**

   Hledáme spočetnou a hustou podmnožinu $A$. Pro $\mathbb{R}$ je $A = \mathbb{Q}$, pro $\mathbb{C}$ je to množina bodů s racionálními souřadnicemi - $a = bi$, $a, b \in \mathbb{Q}$.

   Pro $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ uvažujme $A^n$ - body s racionálními souřadnicemi.

   Prostor $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ je separabilní. Uvažujme množinu $M := \{q+\pi, q \in \mathbb{Q}\}$. Pak $M \subset \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ je spočetná.

   Hustota: Zvolme $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ a uvažujme číslo $x-\pi$. Protože $\mathbb{Q}$ je hustá v $\mathbb{R}$, tak existuje $p \in \mathbb{Q}$ takové, že $|x-\pi-p| < \varepsilon$. Pak ale $|x-(p+\pi)| < \varepsilon$. Tedy k $x$ jsme našli blízké číslo $p+\pi \in M$, což bylo dokázati.

2. Ukažte, že $(C([0,1]),\rho_{\sup})$ je separabilní.

   **Řešení:** $A$ je množina všech polynomů s racionálními koeficienty.

   Zvolme $f \in C[0,1]$. Pak z Weierstrassovy věty existuje takový polynom $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$, že

   $$\sup_{x\in[0,1]} |f(x) - P(x)| < \varepsilon.$$

   Ke koeficientům $a_n$ najděme racionální koeficienty $b_n$ tak, že

   $$\sum_{i=0}^{n} |a_i - b_i| < \varepsilon.$$

   (Lze z předchozího příkladu.)

   Uvažujme polynom $Q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots b_1 x + b_0$. Pak

   $$\sup_{x\in[0,1]} |P(x) - Q(x)| = \sup_{x\in[0,1]} \left|\sum_{i=0}^{n} (a_i - b_i)x^i\right| \leq \sum_{i=0}^{n} |a_i - b_i| x^i \leq \sum_{i=0}^{n} |a_i - b_i| < \varepsilon.$$

Dohromady

$$\sup_{x\in[0,1]} |f(x) - Q(x)| \leq \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - P(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |P(x) - Q(x)| < \varepsilon + \varepsilon.$$

3. Za jakých podmínek je separabilní diskrétní metrický prostor?

   **Řešení:** Konvergentní posloupnost v diskrétním prostoru musí být od jistého bodu konstantní. Z toho plyne, že jediná hustá množina v diskrétním prostoru je celé $X$. A aby $X$ byl separabilní, musí být $X$ spočetná.

4. Ukažte, že $L^1([0,1])$ je separabilní.

   **Řešení:** Nechť $M$ je množina takových jednoduchých funkcí, které mají hodnoty v $\mathbb{Q}$ a zároveň jsou definované pomocí intervalů s racionálními koncovými body. Pak $M$ je hustá a spočetná.

**Věta 3.** Nechť $(X, \rho)$ je metrický prostor. Jestliže existuje nespočetná množina $A \subset X$ a $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $x, y \in A$, $x \neq y$, platí $\rho(x, y) \geq \varepsilon$, pak $X$ není separabilní.

**Poznámka 4.** Nechť $p \in [1, \infty)$ a $l_p$ je množina všech reálných posloupností $\{x_n\}$, pro něž řada $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p$ konverguje. Pak definujeme metriku

$$\rho_p(x, y) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} |x - y|^p \right)^{1/p}.$$

**Poznámka 5.** Označme $l_\infty$ prostor všech omezených reálných posloupností $\{x_n\}$ a $c_0$ prostor všech (omezených) reálných posloupností $\{x_n\}$ s $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Oba jsou s metrikou

$$\rho_\infty(x, y) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|.$$

**Úloha 6.** (Příklad máme z: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf. Taktéž opsána řešení.) Ukažte, že

1. $l^\infty$ není separabilní.

   **Řešení:** Uvažujme $P = 2^{\mathbb{N}}$, množinu všech podmnožin přirozených čísel. Taková množina je nespočetná. Pro $A, B \in P$, $A \neq B$ sestrojme $\chi_A$ a $\chi_B$ - posloupnosti 0 a 1.

   Pak platí

   $$\rho_\infty(\chi_A, \chi_B) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\chi_A - \chi_B| = 1.$$

   Pak dle Věty 3 prostor $l_\infty$ nemůže být separabilní.

2. $c_0$ je separabilní.

   **Řešení:** Uvažujme množinu

   $$A_n = \{x = \{x_i\} \in c_0; x_i \in \mathbb{Q}, x_i = 0 \text{ pro } i > n\}$$

- posloupnosti s racionálními členy, které jsou navíc od daného $n$ nulové.

Dále položme $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Pak $A$ je spočetná (sjednocení spočetných) a hustá v $c_0$.

Zvolme $y = \{y_i\} \in c_0$. Protože $\lim_{i\to\infty} y_i = 0$, lze ke každému $\varepsilon$ najít $n_0$ takové, že pro $i > n_0$ je $|y_i| < \varepsilon$.

Pro každé $i \leq n_0$ najdeme $r_i \in \mathbb{Q}$ tak, že $|r_i - y_i| < \varepsilon$. Sestrojme posloupnost

$$x_i = \begin{cases} r_i, & i \leq n_0, \\ 0, & i > n_0. \end{cases}$$

Pak $x \in A_{n_0}$ a platí

$$\sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i - y_i| = \max\{\sup_{i\leq n_0} |x_i - y_i|, \sup_{i>n_0} |x_i - y_i|\} < \varepsilon.$$

**Úloha 7.** Rozhodněte, zda pampeliškový prostor je separabilní. $X = \mathbb{R}^2$, pro $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$ máme

$$\rho(A, B) = \begin{cases} \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}, & A, B \text{ leží na stejném poloměru}, \\ \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}, & \text{jinak}. \end{cases}$$

**Řešení:** Uvažujme spočetnou hustou množinu $M$.

Pro každý bod $x$ (krom počátku) musí blízký bod $m$ z $M$ ležet na polopřímce spojující $x$ s počátkem (jinak bychom šli přes střed, což by dalo obrovskou vzdálenost). Tedy se ptáme, jestli každá polopřímka obsahuje dostatek bodů z $M$.

Předpokládejme, že na každé polopřímce leží alespoň jeden bod z $M$ (zároveň nemůže ležet na více přímkách najednou). Polopřímek je ale nespočetně - každá odpovídá jednomu úhlu z intervalu $[0, 2\pi)$, což je nespočetná množina.

Tedy jsme ve sporu a pampeliškový prostor není separabilní.

**Úloha 8.** Označme $L_0$ prostor všech lipschitzovských funkcí z $[0, 1]$ do $\mathbb{R}$ takových, že $f(0) = 0$. Zaveďme metriku

$$\rho(f, g) = \sup \left\{ \frac{|(f - g)(x) - (f - g)(y)|}{|x - y|}; x \neq y \right\}$$

- jde o lipschitzovskou konstantu funkce $f - g$.

Ukažte, že prostor $L_0$ není separabilní.

(Zdroj: http://matematika.cuni.cz/dl/analyza/29-mtr/lekce29-mtr-pmax.pdf)

**Řešení:** Uvažujme $M$ - množinu funkcí které se rovnají 0 na $[0, r]$ a pak se rovnají $x - r$ pro různá $r \in [0, 1]$. Tato množina je nespočetná.

Zvolme $f, g \in M$ s příslušnými $r_f < r_g$.

Obrázek: https://www.geogebra.org/calculator/w45zzxfk

Lipschitzovská konstanta $f - g$ je 1. Tedy jsme našli nespočetnou množinu z Věty 3 a množina je určitě neseparabilní.

# 2

**Definice 9.** Nechť $(X, \rho)$ je metrický prostor, nechť $\varepsilon > 0$. Řekneme, že $M \subset X$ je *$\varepsilon$-síť v $X$*, jestliže pro každý bod $x \in X$ existuje bod $y \in M$ takový, že $\rho(x, y) < \varepsilon$.

**Definice 10.** Metrický prostor $(X, \rho)$ se nazývá *totálně omezený*, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje konečná $\varepsilon$-síť.

**Poznámka 11.**
- Někdy se říká i *prekompaktní.*
- Definici lze potkat i takto: Z každého $\varepsilon$-pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí.

**Úloha 12.** Za jakých podmínek je diskrétní metrický prostor omezený? Za jakých je totálně omezený?

**Řešení:** Jelikož koule v diskrétním metrickém prostoru jsou buď jeden bod nebo celý prostor, je diskrétní metrický prostor vždy omezený.

Z téhož důvodu je totálně omezený právě tehdy, když má konečný počet prvků.

**Úloha 13.** Uvažujte prostor $l^2$. Jeho jednotková sféra je omezená množina. Ukažte, že není totálně omezená.

**Řešení:** Uvažujme $M$ množinu posloupností $a_n$, které mají na $n$-tém místě 1, jinde 0.

Pak $\rho(a_n, b_n) = \sqrt{2}$.

Zvolme tedy $\varepsilon = 1/8$ a $\varepsilon$-síť $S$. Pak ale $S$ nemůže být konečná, protože potřebuje nekonečně mnoho bodů (a $\varepsilon$-koulí) aby pokryla $M$.

**Úloha 14** (PRAVDA – NEPRAVDA)**.**

ANO Totálně omezená množina je omezená.

NE Omezená množina je totálně omezená.

**Úloha 15.** Ukažte, že uzávěr totálně omezeného prostoru je totálně omezený.

**Řešení:** Nechť $A$ je totálně omezený. Pak lze najít konečnou $\varepsilon/2$-síť

$$M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

takovou, že

$$A \subseteq \bigcup_{i=1,\dots,n} B(x_i, \varepsilon/2).$$

Pak $\bar{A} \subseteq \bigcup_{i=1,\dots,n} B(x_i, \varepsilon)$.

Zvolme $x \in \bar{A}$. Pak každá koule se středem v $x$ protíná $A$. Speciálně tedy existuje $y \in B(x, \varepsilon/2) \cap A$.

Zároveň toto $y \in B(x_i, \varepsilon/2$ pro nějaké $i$. Ale pak

$$\rho(x, x_i) \leq \rho(x, y) + \rho(y, x_i) \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Hotovo.

**Úloha 16.** Najděte příklad metrického prostoru, který je totálně omezený, ale není kompaktní.

**Řešení:** Např. interval $(2,4)$ - není uzavřený.

---

# 3

**Definice 17.** Řekneme, že metrický prostor $(X,\rho)$ je *souvislý*, jestliže není sjednocením dvou neprázdných disjunktních otevřených množin.

**Věta 18** (Charakterizace souvislých prostorů)**.** Nechť $(X,\rho)$ je metrický prostor. Pak jsou následující výroky ekvivalentní.

1. Prostor $X$ není souvislý.
2. Existují dvě neprázdné disjunktní množiny $F_1, F_2 \subset X$ uzavřené v $(X,\rho)$ a takové, že $X = F_1 \cup F_2$.
3. Existuje obojetná neprázdná množina $H$ splňující $H \neq X$.
4. Existuje spojité surjektivní zobrazení $f : (X,\rho) \to (\{0,1\}, \rho_{diskr})$.

**Poznámka 19** (Jiná definice)**.** Prostor $(X,\rho)$ je nesouvislý, jestliže existují disjunktní neprázdné množiny $A, B \subseteq X$ takové, že $X = A \cup B$ a $\bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = \emptyset$.

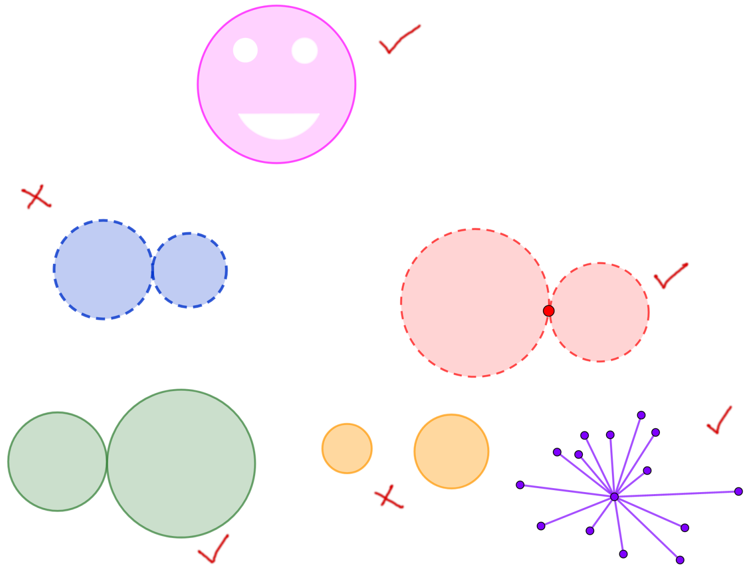
**Definice 20.** Nechť $(X,\rho)$ je metrický prostor, nechť $J \subset X$. Řekneme, že $J$ je *křivka* v prostoru $(X,\rho)$, jestliže existuje spojité zobrazení $f : [0,1] \to (X,\rho)$ takové, že $f([0,1]) = J$.

Řekneme, že množina $A \subset X$ je *křivkově souvislá* v prostoru $(X,\rho)$, jestliže pro každé $a, b \in A$ existuje spojité zobrazení $f : [0,1] \to (A,\rho)$ takové, že $f(0) = a$ a $f(1) = b$.

**Věta 21** (O vztahu souvislosti a křivkové souvislosti)**.** Každá křivkově souvislá množina v metrickém prostoru je v tomto prostoru souvislá.

**Úloha 22.** Které množiny (jsme v $\mathbb{R}^2$) jsou souvislé?

*3*



**Úloha 23** (PRAVDA – NEPRAVDA)**.**

NE Nechť $A$ není souvislý. Pak $\bar{A}$ není souvislý. Např. $(0,1) \cup (1,2)$.

ANO Nechť $A$ je souvislý. Pak $\bar{A}$ je souvislý.

NE Nechť $A$ je souvislý. Pak $\operatorname{int} A$ je souvislý. Např. dva dotýkající se uzavřené kruhy.

ANO Nechť $\bar{A}$ není souvislý. Pak $A$ není souvislý.

**Úloha 24** (PRAVDA – NEPRAVDA)**.**

NE Nechť $A$ není souvislý. Pak $A^c$ není souvislý. Např. doplněk dvou disjunktních kruhů.

NE Nechť $A$ je souvislý. Pak $A^c$ není souvislý. Např. doplněk kruhu.

NE Nechť $A$ je souvislý. Pak $A^c$ je souvislý. Např. $A$ je nekonečný jednotkový pruh podél osy $x$.

NE Nechť $A$ a $B$ jsou souvislé. Pak $A \cup B$ je souvislá. Např. dva disjunktní kruhy.

NE Nechť $A$ a $B$ jsou souvislé. Pak $A \cap B$ je souvislá. Např. když se protnou na koncích dvě fazole.

**Úloha 25.** Za jakých podmínek je diskrétní metrický prostor souvislý?
**Řešení:** Právě tehdy, když má jen jeden prvek

*3*

**Úloha 26.** Ukažte, že prostor $X = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ je křivkově souvislý.

**Řešení:** Zvolme dva body $x, y \in X$. Vytvořme úsečku s krajními body $x$, $y$ a její osu $O$.

Pak lze najít takový bod $b \in O$, že úsečky $xb$ a $xy$ neprotínají $\mathbb{Q}^2$. Zároveň je tato dvojice úseček hledaná spojnice bodů $x$ a $y$.

Pokud by každá dvojice protínala množinu $\mathbb{Q}^2$, znamenalo by to, že dvojic úseček je jen spočetně, což je spor.

(4) volte dělení na střídačku z $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$