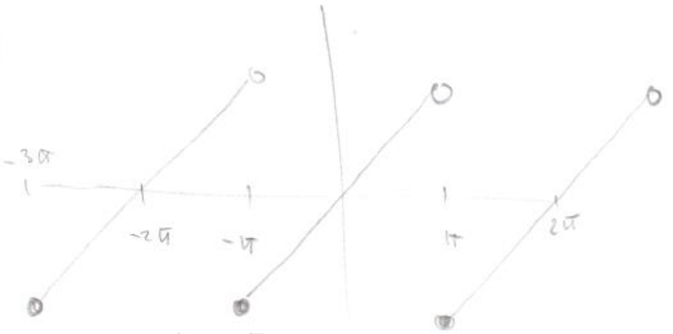
(1a)

$f(x) = x\,, \quad x \in [-\pi, \pi)$



f lichá $\rightarrow a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot 2 \cdot \int_0^\pi x \sin(nx)\, dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n} x \cos(nx)\right]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{1}{n} \cos(nx)\, dx$$

Per partes

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos(nx) + \frac{1}{n^2}\sin(nx)\right]_0^\pi$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos(n\pi)\right) = -\frac{2}{n}(-1)^n$$

$$F_f = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n+1} \sin(nx)$$

Parseval:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 1}{n^2}$$

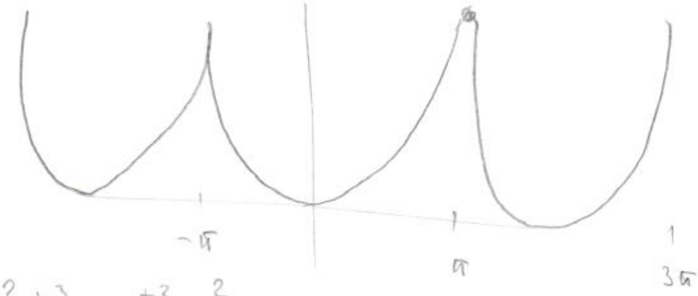
$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2\, dx = 4\pi \sum \frac{1}{n^2}$$

$$\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$\frac{2}{3}\pi^3 = 4\pi \sum \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

(15) $f(x) = x^2 \quad x \in [-\pi, \pi)$



f sudá $\rightarrow$ $b_n = 0 \quad n \in \mathbb{N}$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \, dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi} \frac{2}{3} \pi^3 = \pi^2 \cdot \frac{2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{n} x^2 \sin(nx) + \frac{2x}{n^2} \cos(nx) - \frac{2}{n^3} \sin(nx) \right]_{-\pi}^{\pi}$$

2x per partes

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{n^2} \pi \cos(n\pi) - \frac{2 \cdot (-\pi)}{n^2} \cos(-n\pi) \right) = \frac{4}{n^2} (-1)^n$$

$$F_f = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4}{n^2} \cos(nx)$$

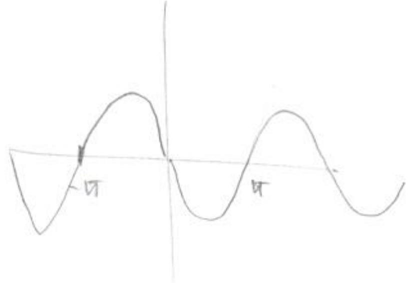
Parseval

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 \, dx = \frac{\left(\frac{2}{3}\pi^2\right)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^5}{5} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{5} \pi^5 \cdot \frac{1}{\pi}$$

$$\frac{2}{5} \pi^4 = \frac{2}{9} \pi^4 + 16 \sum \frac{1}{n^4} \rightarrow \frac{\pi^4}{90} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

(1b) $f(x) = x^3 - \pi^2 x \qquad x \in [-\pi, \pi)$



f lichá $\rightarrow \quad a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x^3 - \pi^2 x) \sin(nx) =$$

3x per partes

$$= \frac{1}{\pi} \left[\left(\frac{6x}{n^3} + \frac{\pi^2 x - x^3}{n} \right) \cos(nx) + \left(\frac{3x^2 - \pi^2}{n^2} - \frac{6}{n^4} \right) \sin(nx) \right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\left(\frac{6\pi}{n^3} + \frac{\pi^3 - \pi^3}{n} \right) \cos(n\pi) - \left(\frac{-6\pi}{n^3} + \frac{-\pi^3 + \pi^3}{n} \right) \cos(n(-\pi)) \right] =$$

$$= \frac{12\pi}{n^3 \pi} (-1)^n = \frac{12}{n^3} (-1)^n$$

$$F_f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12 (-1)^n}{n^3} \sin(nx)$$

Parseval

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x^3 - \pi^2 x)^2 \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(12)^2}{n^6}$$

$$\frac{1}{\pi} \left[\frac{x^7}{7} - \frac{2\pi^2 x^5}{5} + \frac{\pi^4 x^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{16}{105} \pi^6 = 144 \sum \frac{1}{n^6}$$

$$\frac{\pi^6}{945} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$$

do Fourierovy řady na $\mathbb{R}$, která obsahuje pouze členy se $\sin nx$. Rozhodněte, zda řada konverguje na $\mathbb{R}$ a pokud ano, určete její součet. Pomocí této řady pak určete součet číselné řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+1)}{(2k+1)^2 - 4}.$$

2a

Řešení. Položme

$$g(x) = \begin{cases} \cos ax, & x \in (0,\pi) + 2k\pi, \\ 0, & x = k\pi, \\ -\cos ax, & x \in (-\pi, 0) + 2k\pi, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Pak g je lichá funkce s konečnou variací, a tedy její Fourierova řada konverguje ke g.

Při výpočtu jejích koeficentů máme $a_n = 0$ díky lichosti g a

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos ax \sin nx \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{a} \sin nx \sin ax \right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{n}{a} \cos nx \sin ax \, \mathrm{d}x \\ &= -\frac{2n}{\pi a} \int_0^{\pi} \cos nx \sin ax \\ &= \frac{-2n}{\pi a} \left[\frac{-1}{a} \cos nx \cos ax \right]_0^{\pi} + \frac{2n}{\pi a} \int_0^{\pi} \frac{n}{a} \sin nx \cos ax \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{2n}{\pi a^2} [(-1)^n \cos(a\pi) - 1] + \frac{n^2}{a^2} b_n. \end{aligned}$$

Předpokládejme nejprve, že $a \notin \mathbb{N}$. Pak z předchozího plyne

$$b_n = \frac{2n}{\pi(a^2 - n^2)} [(-1)^n \cos(a\pi) - 1], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pokud $a = k$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$, pak

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin kx \cos kx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin 2kx = 0.$$

Tedy Fourierova řada g má tvar

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n=1, n \neq a}^{\infty} \frac{n}{a^2 - n^2} [(-1)^n \cos(a\pi) - 1] \sin nx.$$

Nyní uvažujme $a = 2$ a $x = \frac{\pi}{2}$, pak máme

$$\begin{aligned}
-1 = \cos\pi &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1, n\neq 2}^{\infty} [(-1)^n - 1] \sin n\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)(-1)^k (2k+1)}{4-(2k+1)^2} \\
&= \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+1)}{(2k+1)^2 - 4}.
\end{aligned}$$

Tedy

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+1)}{(2k+1)^2 - 4} = -\frac{\pi}{4}.$$

♣

2b

16.7.6. Příklad. Rozviňte funkci

$$f(x) = \operatorname{sign}(\sin 3x), \quad x \in [0, \pi],$$

do Fourierovy řady na $\mathbb{R}$, která obsahuje pouze členy s $\cos nx$. Rozhodněte, zda řada konverguje na $\mathbb{R}$ a pokud ano, určete její součet. Pomocí této řady pak určete součet číselné řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)(3k+2)}.$$

Řešení. Uvažujme sudé 2π-periodické rozšíření f na R, tj. funkci

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left((-\pi, -\frac{2}{3}\pi) \cup (-\frac{\pi}{3}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{3}) \cup (\frac{2}{3}\pi, \pi)\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \\ 0, & x = \frac{\pi}{3}k, k \in \mathbb{Z}, \\ -1, & x \in \left((-\frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{3}) \cup (\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi)\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Dle Věty 16.4.3 konverguje Fourierova řada g k funkci

$$h(x) = \begin{cases} 1, & x = k\pi, k \in \mathbb{Z}, \\ g(x), & \text{jinak}. \end{cases}$$

Spočtěme koeficienty této řady. Jelikož je g sudá, platí $b_n = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Jinak máme

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$$

a

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(x) \cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos nx\,\mathrm{d}x - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} \cos nx\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \cos nx\,\mathrm{d}x \right) \\
&= \frac{4}{\pi n} \left(\sin(\frac{n\pi}{3}) - \sin(\frac{2n\pi}{3}) \right).
\end{aligned}$$

Tedy

$$a_n = \begin{cases} 0, & n \in \{6k, 6k+1, 6k+3, 6k+5\}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ \frac{4\sqrt{3}}{\pi n}, & n = 6k+2, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ -\frac{4\sqrt{3}}{\pi n}, & n = 6k+4, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{cases}$$

Proto má Fourierova řada funkce g tvar

$$\frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = \frac{1}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{6k+2} \cos(6k+2)x - \frac{1}{6k+4} \cos(6k+4)x \right).$$

Pro $x = 0$ máme

$$\begin{aligned} 1 = h(x) &= \frac{1}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{6k+2} - \frac{1}{6k+4} \right) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)(3k+2)}. \end{aligned}$$

Odtud plyne

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)(3k+2)} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

$\clubsuit$

3 **16.7.7. Příklad.** Pro $\alpha \in [0, \pi]$ sečtěte řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n\alpha}{n^2}$.

Řešení. Uvažujme funkci $f(x) = \chi_{[-\alpha,\alpha]} \in \mathcal{R}([-\pi, \pi])$ a rozviňme ji do Fourierovy řady. Máme

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2\alpha}{\pi}$$

a

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin nx}{n} \right]_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{2 \sin n\alpha}{n\pi}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Díky sudosti funkce f jsou pak všechny koeficienty b_n nulové.

Podle Věty ?? platí

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \pi (a_n^2 + b_n^2).$$

Tedy dostáváme

$$2\alpha = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{4\alpha^2}{\pi^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \pi \frac{4 \sin^2 n\alpha}{n^2 \pi^2},$$

z čehož plyne

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2} = \frac{\alpha(\pi - \alpha)}{2}.$$

Dále platí dle Příkladu ?? vztah

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n\alpha}{n^2},$$

z kterého plyne rovnost

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n\alpha}{n^2} = \frac{\pi^2 - 3\pi\alpha + 3\alpha^2}{6}.$$

♣

(4a)

4. [7b] Mějme $f(x) = \cos 3x$ na $\langle -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\rangle$, $f(x) = 0$ na $\langle -\pi, -\frac{\pi}{6}\rangle$ a $\langle \frac{\pi}{6}, \pi\rangle$ a dále periodicky s periodou 2π.

   1. Rozviňte tuto funkci do 2π-periodické Fourierovy řady. Určete, k jaké funkci konverguje výsledná řada a proč.

   2. Napište Parsevalovu rovnost a výpočtem určitého integrálu v ní sečtěte příslušnou číselnou řadu.

Řešení: Funkce je sudá, tedy:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x\, dx = \left[\frac{2}{3\pi}\sin 3x\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{2}{3\pi},$$

a dále

$$\pi a_n = 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x \cos nx\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \big(\cos(3+n)x + \cos(3-n)x\big)\, dx.$$

Je vidět, že výpočet bude vypadat jinak pro $n = 3$ a jinak pro $n \neq 3$. Pro $n = 3$ máme

$$\pi a_3 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \big(\cos 6x + 1\big)\, dx = \frac{1}{6}\Big[\sin 6x\Big]_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6},$$

zatímco pro $n \neq 3$ je

$$\begin{aligned}
\pi a_n &= \frac{1}{3+n}\Big[\sin(3+n)x\Big]_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{3-n}\Big[\sin(3-n)x\Big]_0^{\frac{\pi}{6}} = \\
&= \frac{1}{3+n}\sin(3+n)\frac{\pi}{6} + \frac{1}{3-n}\sin(3-n)\frac{\pi}{6} = \frac{1}{3+n}\cos n\frac{\pi}{6} + \frac{1}{3-n}\cos n\frac{\pi}{6} = \\
&= \frac{6}{\pi(9-n^2)}\cos n\frac{\pi}{6}.
\end{aligned}$$

Fourierova řada má proto tvar

$$F_f(x) = \frac{1}{3\pi} + \frac{1}{6}\cos 3x + \frac{6}{\pi}\sum_{n=1, n\neq 3}^{\infty} \frac{\cos\frac{n\pi}{6}\cos nx}{9-n^2},$$

a protože zadaná funkce je po částech C^1 s vlastními jednostrannými limitami hodnot funkce i derivací ve všech „hrotech“, a navíc je spojitá na celém $\mathbb{R}$, konverguje Fourierova řada bodově pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a platí $F_f(x) = f(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Parsevalova rovnost (v našem případě $\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 3x\, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$) dává:

$$\frac{1}{6} = \frac{2}{9\pi^2} + \frac{1}{36} + \frac{36}{\pi^2}\sum_{n=1, n\neq 3}^{\infty} \frac{\cos^2\frac{n\pi}{6}}{(9-n^2)^2},$$

případně:

$$\sum_{n=1, n\neq 3}^{\infty} \frac{\cos^2\frac{n\pi}{6}}{(9-n^2)^2} = \frac{5\pi^2}{1296} - \frac{1}{162}.$$

(4b)

4b

4. [7b] Funkce f splňuje: $f(x) = 0$ na $(-\pi, -\pi/2)$, $f(x) = x$ na $(0, \pi/2)$, navíc je sudá a 2π-periodická na $\mathbb{R}$. Rozviňte ji do Fourierovy řady, určete, jakým způsobem tato řada konverguje a k jaké funkci. Dosazením $x = \frac{\pi}{2}$ do Fourierovy řady sečtěte příslušnou číselnou řadu.

Řešení: Ze sudosti dostáváme

$$b_n = 0\,, \qquad a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{\pi}{4}\,,$$

a dále

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \cdots = \frac{1}{\pi n^2}\left(2\cos\frac{\pi n}{2} + \pi n\sin\frac{\pi n}{2} - 2\right).$$

Fourierova řada má proto tvar

$$F_f(x) = \frac{\pi}{8} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi n^2}\left(2\cos\frac{\pi n}{2} + \pi n\sin\frac{\pi n}{2} - 2\right)\cos nx\,,$$

a protože zadaná funkce (označme ji $\widetilde{f}$) je funkce po částech $\mathcal{C}^1$ s vlastními jednostrannými limitami hodnot funkce i derivací ve všech bodech nespojitosti, konverguje Fourierova řada bodově pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a platí

$$F_f(x) = \frac{\widetilde{f}(x+) + \widetilde{f}(x-)}{2} \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Při dosazení bodu $x = \frac{\pi}{2}$ do (3) tedy na pravé straně rovnosti dostaneme $\frac{\pi}{4}$, načež dostaneme

$$\frac{\pi}{8} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi n^2}\left(2\cos\frac{\pi n}{2} + \pi n\sin\frac{\pi n}{2} - 2\right)\cos\frac{\pi n}{2} = \frac{\pi}{4}\,.$$

Protože $\sin\frac{\pi n}{2}\cos\frac{\pi n}{2} = \frac{1}{2}\sin\pi n = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, máme odtud

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2\frac{\pi n}{2} - \cos\frac{\pi n}{2}}{n^2} = \frac{\pi^2}{16}\,,$$

což je jedna z možných forem výsledku. Je však možno si ještě uvědomit, že výraz $\cos^2\frac{\pi n}{2} - \cos\frac{\pi n}{2}$ je nenulový pouze pro $n = 4k+2$, a pak má hodnotu 2, tedy

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{(4k+2)^2} = \frac{\pi^2}{16} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\,,$$

což je jednodušší a přehlednější forma výsledku.

$$= -\frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\sin 5x$$

V tomto případě $b_1 = -\frac{1}{2}, b_5 = \frac{1}{2}$ a ostaní koeficienty jsou nulové.

(b)

$$\cos^4 x = \left(\text{použiji vztah } \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}\right) = \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 =$$
$$= \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x\right) = \left(\text{použiji stejný vztah pro } \cos^2 2x\right) =$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{8} = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$$

V tomto případě $a_0 = \frac{3}{4}, a_2 = \frac{1}{2}, a_4 = \frac{1}{8}$ a ostatní koeficienty jsou nulové.

U tohoto příkladu vidíme, že ne vždy je třeba počítat Fourierovy koeficienty přes integrály. Pokud mám součet, součin či mocninu goniometrických funkcí, je někdy možné použitím vztahů, které pro ně platí, převést funkci na lineární kombinaci funkcí $\cos nx, \sin nx$. Získáme tak vlastně Fourierovu řadu dané funkce s konečným počtem nenulových koeficientů.

5

Příklad 2. Pomocí koeficientů a_n, b_n Fourierovy řady 2π-periodické funkce $y = f(x)$ vyjádřete koeficienty a'_n, b'_n posunuté funkce $y = g(x) = f(x + h)$, kde $h > 0$ je kladná konstanta.

Řešení:

Původní funkce je $y = f(x)$, její koeficienty jsou

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \,\mathrm{d}x,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \,\mathrm{d}x.$$

Funkce $y = f(x+h)$ má koeficienty

$$a'_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+h)\cos nx \,\mathrm{d}x = (\text{použiji substituci } t = x+h) =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(t)\cos(nt-nh)\,\mathrm{d}t = (\text{použiji vzorec pro kosinus rozdílu})$$
$$= \left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t\right]\cos nh + \left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t\right]\sin nh =$$

(nyní využiji toho, že platí: $\displaystyle\int_{-\pi+h}^{\pi+h} = \int_{-\pi}^{\pi} + \int_{\pi}^{\pi+h} - \int_{-\pi}^{-\pi+h} = \int_{-\pi}^{\pi}$,

protože z toho důvodu, že funkce má periodu 2π, mají druhý

a třetí člen opačnou velikost, takže se odečtou)

$$= \left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t\right]\cos nh + \left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t\right]\sin nh =$$
$$= \underline{a_n\cos nh + b_n \sin nh}$$

$$b'_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+h)\sin nx \,\mathrm{d}x = (\text{použiji substituci } t = x+h) =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(t)\sin(nt-nh)\,\mathrm{d}t = (\text{použiji vzorec pro sinus rozdílu})$$
$$= \left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t\right]\cos nh - \left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t\right]\sin nh =$$

(upravím meze jako u koeficientů a_n :)

$$= \left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t\right]\cos nh - \left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t\right]\sin nh =$$
$$= b_n\cos nh - a_n\sin nh$$

6 **Příklad 3.** Nechť $y = f(x)$ je funkce integrovatelná na $\langle -\pi, \pi\rangle$. Dokažte, že pro koeficienty a_k, b_k Fourierovy řady funkce f platí:

(a) Je-li f periodická s periodou π, tj. $f(x) = f(x+\pi)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, pak $a_{2k-1} = b_{2k-1} = 0$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.

(b) Je-li f tzv. antiperiodická s antiperiodou π, tj. $f(x+\pi) = -f(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, pak $a_0 = a_{2k} = b_{2k} = 0$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.

Řešení:

Ga

(a)

$$a_{2k-1} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(2k-1)x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos(2k-1)x\,\mathrm{d}x +$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(2k-1)x\,\mathrm{d}x = (\text{u prvního integrálu provedu substituci}$$
$$x = x+\pi) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+\pi)\cos(2k-1)(x+\pi)\,\mathrm{d}x +$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(2k-1)x\,\mathrm{d}x = (\text{použiji vztah pro kosinus součtu a}$$
$$\text{využiji, že platí } f(x) = f(x+\pi)) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\,[\cos(2k-1)x\,\cos(2k-1)\pi$$
$$-\sin(2k-1)x\,\sin(2k-1)\pi]\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(2k-1)x\,\mathrm{d}x =$$
$$= -\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(2k-1)x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(2k-1)x\,\mathrm{d}x = 0$$

$$b_{2k-1} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(2k-1)x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin(2k-1)x\,\mathrm{d}x +$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(2k-1)x\,\mathrm{d}x = (\text{u prvního integrálu provedu substituci}$$
$$x = x+\pi) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+\pi)\sin(2k-1)(x+\pi)\,\mathrm{d}x +$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(2k-1)x\,\mathrm{d}x = (\text{použiji vztah pro sinus součtu a}$$
$$\text{využiji, že že platí } f(x) = f(x+\pi)) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\,[\sin(2k-1)x\,\cos(2k-1)\pi$$
$$+\cos(2k-1)x\,\sin(2k-1)\pi]\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(2k-1)x\,\mathrm{d}x =$$
$$= -\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(2k-1)x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(2k-1)x\,\mathrm{d}x = 0$$

65

(b)

$$a_{2k} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(2k)x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos(2k)x\,\mathrm{d}x +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(2k)x\,\mathrm{d}x = (\text{u prvního integrálu provedu substituci}$$

$$x = x+\pi) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+\pi)\cos(2k)(x+\pi)\,\mathrm{d}x +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(2k)x\,\mathrm{d}x = (\text{použiji vztah pro kosinus součtu a}$$

$$\text{využiji, že platí } -f(x) = f(x+\pi)) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\left[\cos(2k)x\,\cos(2k)\pi\right.$$

$$\left.+\sin(2k)x\,\sin(2k)\pi\right]\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(2k)x\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(2k)x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(2k)x\,\mathrm{d}x = 0$$

$$b_{2k} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(2k)x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin(2k)x\,\mathrm{d}x +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(2k)x\,\mathrm{d}x = (\text{u prvního integrálu provedu substituci}$$

$$x = x+\pi) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+\pi)\sin(2k)(x+\pi)\,\mathrm{d}x +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(2k)x\,\mathrm{d}x = (\text{použiji vztah pro sinus součtu a}$$

$$\text{využiji, že platí } -f(x) = f(x+\pi)) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\left[\sin(2k)x\,\cos(2k)\pi\right.$$

$$\left.+\cos(2k)x\,\sin(2k)\pi\right]\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(2k)x\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(2k)x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(2k)x\,\mathrm{d}x = 0$$

Příklad 4. Nalezněte Fourierovu řadu funkce $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ na intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$.

Pro která x nalezená řada konverguje a jaký je její součet? Pomocí výsledku určete součet nekonečné řady

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

14. f 2π - period, $C^1(\mathbb{R})$

7

- $a_k = 0 \quad \forall k \geq 0 \rightarrow f(x)$ lichá
- $b_k = 0 \quad \forall k \geq 1 \rightarrow f(x)$ sudá

- $a_k = 0$
  - $g(x) = f(x) + f(-x)$

Pro F_g: $$a_k^g = \frac{1}{\pi}\left(\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)}_{a_k^f} + \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f(-x)\cos(k(-x))\,dx}\right)$$

$y = -x \quad dy = -1\,dx$

$$-\int_{\pi}^{-\pi} f(y)\cos(-ky)\,dy =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\cos(ky)\,dy = a_k^f$$

$= 0 + 0$

$$a_0^g = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(-x)\,dx = 0 + 0$$

$y = -x$

$$b_k^g = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx + \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(-x)\sin(kx)\,dx}_{} = b_k^f - b_k^f = 0$$

$y = -x \quad dy = -1\,dx$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{-\pi} f(y)\sin(-ky)\,dy = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\sin(ky)\,dy$$

$= -b_k^f$

$\rightarrow \forall$ koef $= 0$, $f(x)$ i $f(-x)$ je $C^1 \rightarrow F_g \rightarrow g \rightarrow$

$0 = f(x) + f(-x) \rightarrow$ $\boxed{f \text{ lichá}}$

- $b_k = 0$ stejně