12. cvičení – Fourierovy řady

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (Parsevalova rovnost)**.** Nechť f je definována na $[-\pi,\pi]$ a $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje. Pak

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2.$$

Příklady

1. Parsevalova rovnost:

   (a) Funkce $f(x) = x$ na $[-\pi,\pi)$, pak je 2π-periodická. Najděte její Fourierovu řadu a aplikujte Parsevalovu rovnost.

   (b) Funkce $f(x) = x^2$ na $[-\pi,\pi)$, pak je 2π-periodická. Najděte její Fourierovu řadu a aplikujte Parsevalovu rovnost.

   (c) Funkce $f(x) = x^3 - \pi^2 x$ na $[-\pi,\pi)$, pak je 2π-periodická. Najděte její Fourierovu řadu a aplikujte Parsevalovu rovnost.

2. Rozviňte funkci do (sinové, kosinové, obyčejné) Fourierovy řady. Rozhodněte, zda řada konverguje stejnoměrně (lok. stejnoměrně) na největších možných podintervalech $[0,2\pi]$ (příp. $\mathbb{R}$) a určete její součet. Určete pak součet zadaných číselných řad.

   (a) sinová řada: $f(x) = \cos(ax)$, $a > 0$, $\in [0,\pi)$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{(2n+1)^2 - 4}$

   (b) kosinová řada: $f(x) = \operatorname{sign}(\sin(3x))$, $x \in [0,\pi)$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)}$

3. ❀ Pro $\alpha \in [0,\pi]$ sečtěte řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2}$ a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n\alpha}{n^2}$.

   Návod: Rozviňte funkci $\chi_{[-\alpha,\alpha]}$.

4. Zkouškové písemky doc. Rokyty:

   https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/

   (a) Funkce $f(x) = \cos 3x$ na $[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}]$, $f(x) = 0$ jinde na $(-\pi,\pi)$, pak je 2π-periodická. Najděte její Fourierovu řadu a aplikujte Parsevalovu rovnost.

   (b) ❄ $f(x) = 0$ na $(-\pi,-\frac{\pi}{2})$, $f(x) = x$ na $(0,\frac{\pi}{2})$, je sudá a 2π-periodická. Rozviňte funkci do 2π-periodické Fourierovy řady. Určete, k jaké funkci konverguje výsledná řada a jak (konverguje stejnoměrně?). Dosaďte $x = \frac{\pi}{2}$ a sečtěte příslušnou číselnou řadu.

Bonus

5. ✿ Pomocí koeficientů a_n, b_n Fourierovy řady 2π-periodické funkce $f(x)$ vyjádřete koeficienty posunuté funkce $g(x) = f(x+h)$, $h > 0$.

6. ♡ Nechť f je integrovatelná na $[-\pi, \pi]$. Ukažte, že platí

   (a) Je-li f periodická s periodou π, tedy $f(x) = f(x+\pi)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, pak $a_{2k-1} = b_{2k-1} = 0$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.

   (b) Je-li f antiperiodická s periodou π, tedy $-f(x) = f(x+\pi)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, pak $a_0 = a_{2k} = b_{2k} = 0$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.

7. ❄ Nechť f je 2π-periodická funkce, nechť navíc $f \in C^1(\mathbb{R})$. Ukažte, že

   (a) jestliže $a_k = 0$ pro $\forall k \geq 0$, pak $f(x)$ je lichá;

   (b) jestliže $b_k = 0$ pro $\forall k \geq 1$, pak $f(x)$ je sudá.

(3) Parseval. Pak vztahy $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ a $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$
(4b) $\cos^2 \frac{\pi n}{2} - \cos \frac{\pi n}{2} \neq 0$ jen pro $n = 4k+2$
(5) substituce $y = x + h$, součtové vzorce, periodicita
(6) součtové vzorce
(7) jak vypadá F. řada pro $f(x) \mp f(-x)$?