1a

Řešení:

Zadaná funkce je tohoto tvaru:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-\pi, 0) \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x \in (0, \pi] \end{cases}$$

je BV([0, 2π])

Funkce je lichá, a tedy všechny koeficienty a_n jsou nulové. Spočteme koeficienty b_n:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 1 \sin nx \,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left[\frac{-\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^{n+1}+1}{n}\right)$$

Podle Dirichletovy věty Fourierova řada konverguje k funkci $\operatorname{sgn}(x)$ na celém intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$. Pro každé $x \in \langle -\pi, \pi\rangle$ tedy platí

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}+1}{n}\sin nx = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$$

Řadu $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots$ lze zapsat pomocí sumy: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$

Pro $x = \frac{\pi}{2}$ dostaneme:

$S_n f \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na $(-\pi, 0)$ $(0, \pi)$

$$1 = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

Odtud získáme:

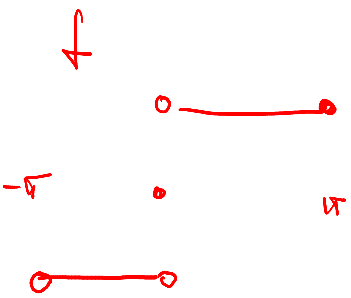
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \cancel{\frac{4}{\pi}}\ \frac{\pi}{4}$$

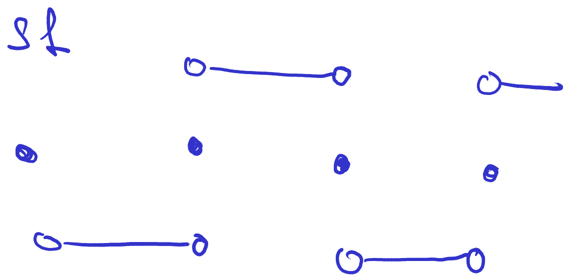
na $[-\pi, \pi]$ nelze

f není spoj.

Příklad 5. Rozložte ve Fourierovu řadu funkci:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \langle -\pi, 0\rangle \\ \sin x, & x \in \langle 0, \pi\rangle\,. \end{cases}$$





Pozorování: Je-li f trigonometrický polynom, pak její Fourierova řada s tímto polynomem splývá.

Příklad (13) Napište funkci $\cos^6 x$, $x \in \mathbb{R}$, ve tvaru trigonometrického polynomu

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos 2x}{2} \qquad \in C^1(\mathbb{R}) \qquad S_n^f \rightrightarrows f \text{ na } [0, 2\pi]$$

$$\cos^4(x) = (\cos^2(x))^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos^2 2x = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right) =$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$$

$$\cos^6(x) = \cos^4(x)\cdot\cos^2(x) = \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2}\right) =$$

$$= \frac{3}{16} + \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{16}\cos 4x + \frac{3}{16}\cos 2x + \frac{1}{4}(\cos 2x)^2 + \frac{1}{16}\cos 2x \cos 4x$$

$$= \frac{3}{16} + \frac{7}{16}\cos 2x + \frac{1}{16}\cos 4x + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos 4x\right) + \left(\frac{1}{32}(\cos 6x + \cos 2x)\right) =$$

$$= \frac{5}{16} + \frac{15}{32}\cos 2x + \frac{3}{16}\cos 4x + \frac{1}{32}\cos 6x$$

$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$

Příklad 5) Rozložte ve Fourierovu řadu funkci $\operatorname{sgn}(x)$, $x \in (-\pi, \pi)$, a určete její součet na $\mathbb{R}$.

Řešení f je lichá, rozšíříme 2π-periodicky na $\mathbb{R}$

$a_k = 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi 1\cdot\sin(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos(kx)}{k}\right]_0^\pi = \frac{2}{\pi k}\cdot\left((-1)^{k+1} + 1\right) = \begin{cases} 0 & k \text{ sudé} \\ \frac{4}{\pi k} & k \text{ liché} \end{cases}$$

Fourierova řada pro funkci f

$$\frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin((2m+1)x)}{2m+1}$$

např. z monotonií

$f \in BV([0, 2\pi]) \cap P_{2\pi}$, tedy z J-D kritéria $S_n^f \to \dfrac{f(x+) + f(x-)}{2}$

Tedy $$\frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin((2m+1)x)}{2m+1} = \tilde{f}(x), \quad x \in \mathbb{R}, \text{ kde}$$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 0 & x = k\pi, \\ \operatorname{sgn}(x - 2k\pi) & x \in ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi), \ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

(1c)

$$\text{b)} f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\pi, 0\rangle, \\ x, & x \in (0, \pi\rangle. \end{cases}$$

$\in BV([0,2\pi])$

Řešení. Obě zadané funkce jsou monotónní, spojité a ohraničené na daných intervalech. Provedeme integraci v intervalech $\langle -\pi, 0\rangle$ a $\langle 0, \pi\rangle$ a dostaneme jednotlivé koeficienty. Platí

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\pi} x\,dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(0 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi}\right) = \frac{\pi}{2},$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi} x\cos nx\,dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(0 + \left[\frac{x}{n}\sin nx + \frac{1}{n^2}\cos nx\right]_0^{\pi}\right) = \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n^2}\cos n\pi - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1) = \frac{1}{n^2\pi}\left[(-1)^n - 1\right], \end{aligned}$$

a proto

loc

$S_n f \rightrightarrows f$ na $(-\pi,\pi)$

$$a_1 = -\frac{2}{\pi},\ a_2 = 0,\ a_3 = -\frac{2}{9\pi},\ a_4 = 0,\ \ldots$$

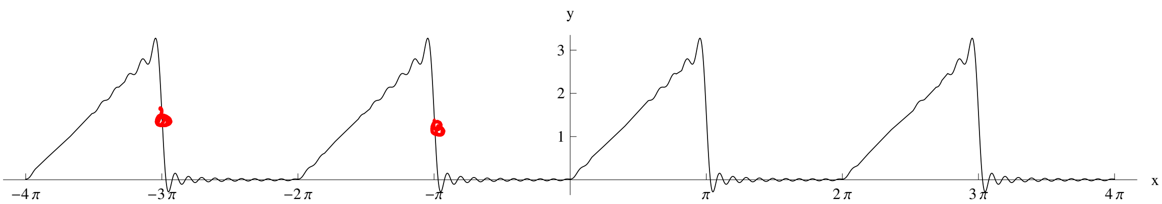
$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\sin nx\,dx + \int_{0}^{\pi} x\sin nx\,dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(0 + \left[-\frac{x}{n}\cos nx + \frac{1}{n^2}\sin nx\right]_0^{\pi}\right) = \\ &= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos n\pi\right) = -\frac{1}{n}\cos n\pi = -\frac{1}{n}(-1)^n, \end{aligned}$$

na $[-\pi,\pi]$ nelze - f není spoj.

$$b_1 = 1,\ b_2 = -\frac{1}{2},\ b_3 = \frac{1}{3},\ \ldots$$

Poté získané koeficienty dosadíme a dostaneme hledaný rozvoj

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) = \\ &= \frac{\pi}{4} + \left(-\frac{2}{\pi}\cos x - \frac{2}{9\pi}\cos 3x + \cdots\right) + \left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \cdots\right). \end{aligned}$$



Obr. 2. Periodické rozšíření dané funkce

b

Řešení. Funkce f je po 2π-periodickém dodefinování na $\mathbb{R}$ spojitá. Navíc je monotónní na $[-\pi, 0]$ a $[0, \pi]$, a tedy má na těchto intervalech konečnou variaci. Proto je f konečné variace na libovolném omezeném intervalu v $\mathbb{R}$. Dle Věty 16.4.3 tak Fourierova řada funkce f konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$ k f. Máme

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}\pi^2$$

a

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi^2 - x^2)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\pi\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{x^2 \sin nx}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{2x\sin nx}{n}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi} x \sin nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{n\pi}\left(\left[-\frac{x\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{4}{n\pi}\left(-\frac{\pi\cos n\pi}{n}\right) \\
&= \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}.
\end{aligned}$$

Dále $b_n = 0$ díky sudosti funkce f. Tedy

$$f(x) = \frac{2}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dosadíme-li za x postupně 0 a π, obdržíme rovnosti

$$\pi^2 = \frac{2}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}, \qquad 0 = \frac{2}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n^2}.$$

Z nich plynou vztahy

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

♣

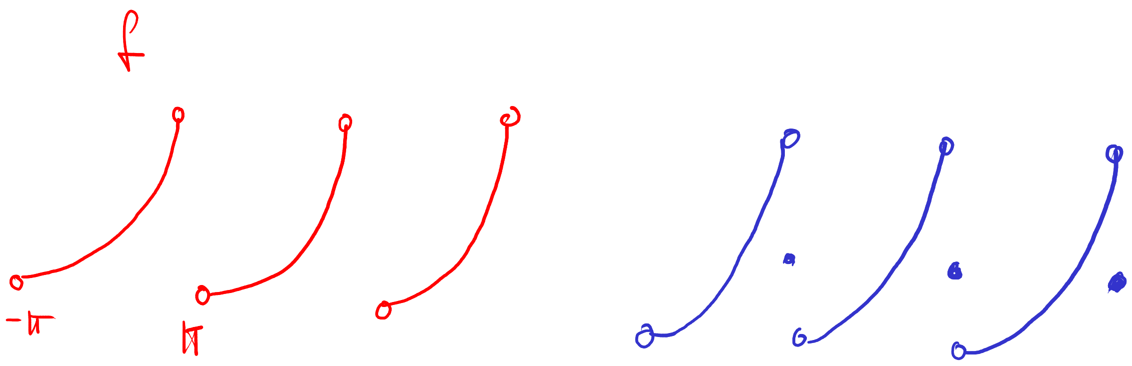
c

16.7.2. Příklad. Rozviňte funkci

$$f(x) = e^x, \quad x \in (-\pi, \pi),$$

do Fourierovy řady na $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zda řada konverguje na $\mathbb{R}$ a pokud ano, určete její součet. Pomocí této řady pak určete součet číselné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}.$$



le

Řešení. Definujme funkci g na $\mathbb{R}$ jako

$$g(x) = \begin{cases} e^{x-2k\pi}, & x \in ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{2}, & x = (2k-1)\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Pak je g funkce s konečnou variací na každém konečném podintervalu $\mathbb{R}$ a dle Věty 16.4.3 konverguje Fourierova řada funkce f ke g na $\mathbb{R}$.

Počítáme-li její koeficenty, dostáváme

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \, dx = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi}.$$

Dále pro $I_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos kx \, dx$, $k \in \mathbb{N}$, máme

$$\begin{aligned} I_k &= [e^x \cos kx]_{-\pi}^{\pi} + k \int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin kx \, dx \\ &= \cos(k\pi)\,(e^{\pi} - e^{-\pi}) + k \left([e^x \sin kx]_{-\pi}^{\pi} - k \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos kx \, dx \right) \\ &= \cos(k\pi)\,(e^{\pi} - e^{-\pi}) - k^2 I_k. \end{aligned}$$

Tedy

$$I_k = (-1)^k \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{k^2 + 1}$$

a

$$a_n = \frac{1}{\pi} I_n = (-1)^n \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi(n^2+1)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dále máme z již provedeného výpočtu rovnost pro koeficenty b_n:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin nx \, dx = \frac{-n}{\pi} I_n = (-1)^{n+1} \frac{n(e^{\pi} - e^{-\pi})}{n^2+1}.$$

Tedy

$$g(x) = \frac{\sinh \pi}{\pi} + \frac{2 \sinh \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} (\cos nx - n \sin nx), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dosadíme-li za $x = 0$, dostáváme

$$1 = \frac{\sinh \pi}{\pi} + \frac{2 \sinh \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}.$$

Odtud

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\sinh \pi} - 1 \right).$$

♣

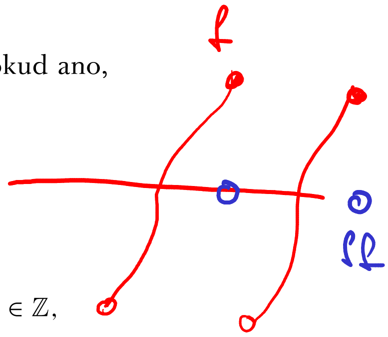
$S_n f \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na $(-\pi, \pi)$

na $[-\pi, \pi]$ ne – f není spoj.

1ℓ

16.7.3. Příklad. Rozviňte funkci

$$f(x) = \sin 3x + 4x, \quad x \in (-\pi, \pi],$$



do Fourierovy řady na $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zda řada konverguje na $\mathbb{R}$ a pokud ano, určete její součet. Pomocí této řady pak určete součet číselné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin n}{n}.$$

Řešení. Definujme funkci g na $\mathbb{R}$ jako

$$g(x) = \begin{cases} \sin 3(x - 2k\pi) + 4(x - 2k\pi), & x \in ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}, \\ 0, & x = (2k-1)\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Pak je g funkce s konečnou variací na každém konečném podintervalu $\mathbb{R}$ a dle Věty 16.4.3 konverguje Fourierova řada funkce f ke g na $\mathbb{R}$.

Jelikož je f lichá na $(-\pi, \pi)$, je $a_n = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dále platí

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin 3x \sin nx \, dx = \begin{cases} 1, & n = 3, \\ 0, & n \neq 3, \end{cases}$$

$S_n f \overset{loc}{\rightrightarrows}$ na $(-\pi, \pi)$

ale ne na $[-\pi, \pi]$

$-$ f není spoj

a

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 4x \sin nx \, dx = \frac{8}{\pi} \left(\left[-\frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{n} \, dx \right)$$
$$= \frac{8}{\pi} \left(-\frac{\pi \cos(n\pi)}{n} \right) = (-1)^{n+1} \frac{8}{n}.$$

Tedy

$$g(x) = \sin 3x + 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pro $x = 1$ dostáváme

$$\sin 3 + 4 = \sin 3 + 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin n}{n},$$

a tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin n}{n} = \frac{1}{2}.$$

♣

16.7.4. Příklad. Rozviňte funkci

$$f(x) = \sin x, \quad x \in [0, \pi),$$

do Fourierovy řady na $\mathbb{R}$, která obsahuje pouze členy s $\cos nx$. Rozhodněte, zda řada konverguje na $\mathbb{R}$ a pokud ano, určete její součet. Pomocí této řady pak určete

1g

$$\text{d)}\, f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, \pi), \\ 0, & x \in (\pi, 2\pi) \\ \frac{1}{2}, & x = 0, \pi, 2\pi. \end{cases}$$

$\in BV([0, 2\pi])$

Řešení. Pro jednotlivé koeficienty Fourierovy řady platí

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^\pi dx + \int_\pi^{2\pi} 0\, dx\right) = \frac{1}{\pi}\Big[x\Big]_0^\pi = 1,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^\pi \cos nx\, dx + \int_\pi^{2\pi} 0 \cos nx\, dx\right) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}\sin nx\right]_0^\pi = 0,$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^\pi \sin nx\, dx + \int_\pi^{2\pi} 0 \sin nx\, dx\right) = \frac{1}{n\pi}\Big[-\cos nx\Big]_0^\pi = -\frac{1}{n\pi}(\cos n\pi - \cos 0) = \\ &= -\frac{(-1)^n - 1}{n\pi}. \end{aligned}$$

$S_n f \overset{loc}{\rightrightarrows} f$

na $(0,\pi)$, $(\pi, 2\pi)$

$$b_1 = \frac{2}{\pi},\ b_2 = 0,\ b_3 = \frac{2}{3\pi},\ b_4 = 0,\ b_5 = \frac{2}{5\pi},\ \ldots$$

ale ne na $[0, 2\pi]$ - f není spoj.

Fourierův rozvoj zadané periodické funkce je

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin x + \frac{2}{3\pi}\sin 3x + \frac{2}{5\pi}\sin 5x + \cdots$$

$$\text{e)}\, f(x) = \sin x, \quad x \in \langle 0, \pi\rangle.$$

Řešení. Pro Fourierovy koeficienty platí

$$a_0 = \frac{1}{\frac{\pi}{2}}\int_0^\pi \sin x\, dx = \frac{2}{\pi}\Big[-\cos x\Big]_0^\pi = \frac{2}{\pi}(-\cos\pi + \cos 0) = \frac{4}{\pi},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x \cos\frac{n\pi}{\frac{\pi}{2}}x\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x \cos 2nx\, dx$$

Pro výpočet použijeme vzorec $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$

Pomocí této Fourierovy řady můžeme vyjádřit např. π^2.
Položíme-li zde $x = \pi$, obdržíme

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}, \text{ odkud } \pi^2 = 6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Položíme-li $x = 0$, obdržíme

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}, \text{ odkud } \pi^2 = 12\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n^2}.$$

1h

Příklad 5.1.3. *Najděte Fourierův rozvoj funkce $f(x) = x^2$ na intervalu* $[0, 2\pi]$.
Řešení: Hledáme Fourierovu řadu funkce f na intervalu délky 2π, tudíž pro výpočet Fourierových koeficientů využijeme poznámky 4.1.9. Funkce není lichá ani sudá.

$\in BV([0,2\pi])$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\, dx = \frac{8}{3}\pi^2,$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \cos nx\, dx, n \in \mathbb{N}.$$

Odtud metodou per partes dostaneme

$$a_n = \frac{4}{n^2} \text{ pro } n = 1, 2, ...$$

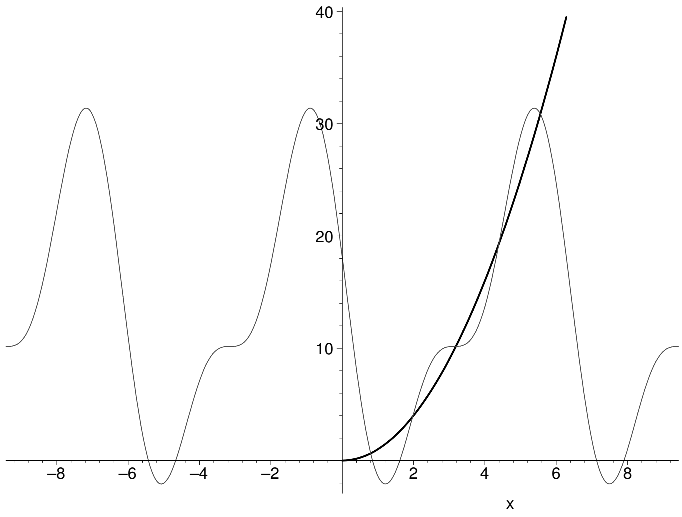
Pro $b_n,\ n \in \mathbb{N}$ platí

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \sin nx\, dx = ... = -\frac{4\pi}{n} \text{ pro } n = 1, 2, ...$$

Tedy pro všechna x z intervalu $(0, 2\pi)$ platí

$$x^2 = \frac{4}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\cos nx - \frac{\pi}{n}\sin nx\right)$$

a v krajních bodech intervalu nabývá funkce (podle Dirichletovy věty) hodnoty aritmetického průměru.



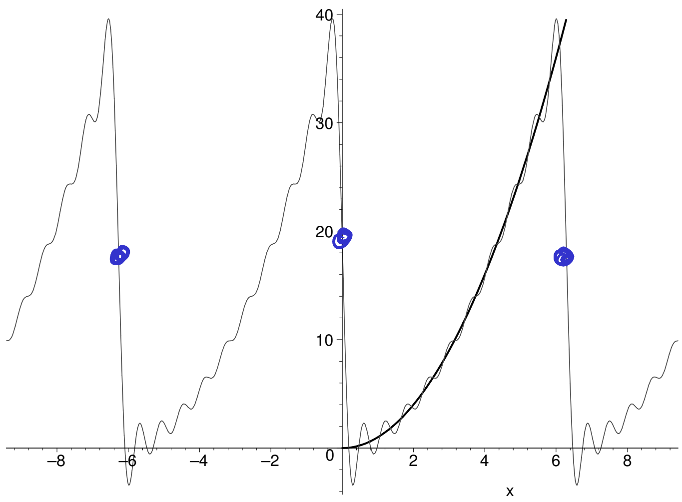
Obr.3a: Graf $f(x) = x^2$ na int. $[0, 2\pi]$ pro n=2

$S_n f \overset{loc}{\rightrightarrows} f$

na $(0, 2\pi)$

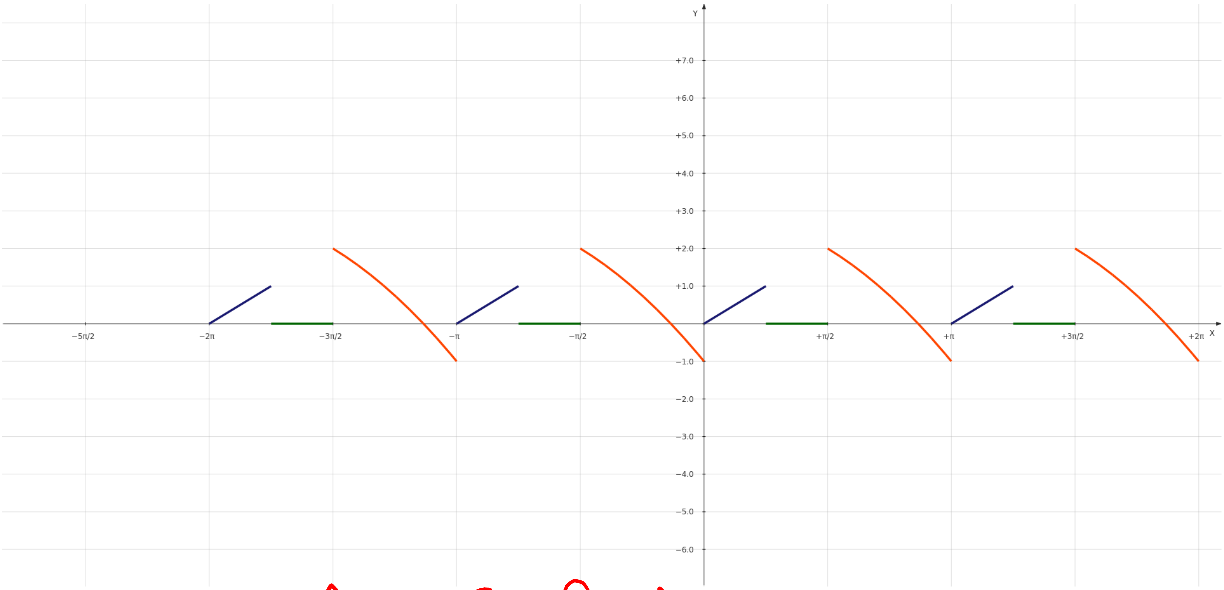
ale ne na $[0, 2\pi]$

- f není spoj.

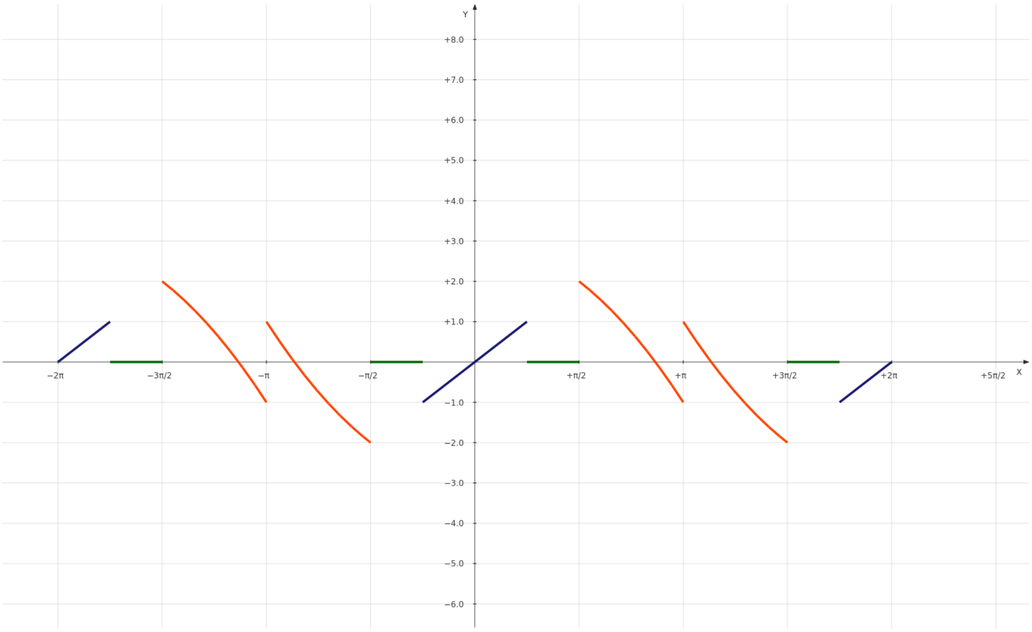


Obr.3b: Graf $f(x) = x^2$ na int. $[0, 2\pi]$ pro n=10

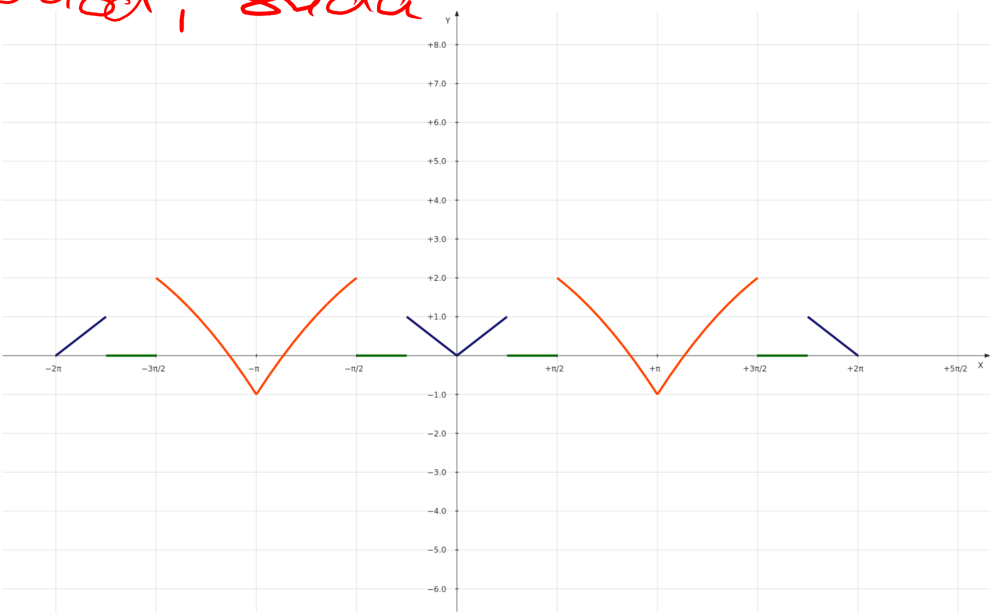
② π- period



2π - period, lichá



2π - period, sudá



$$\left[f(x) = \tfrac{4}{3}\pi^2 + 4\left(\cos x + \tfrac{1}{4}\cos 2x + \cdots\right) - 4\pi\left(\sin x + \tfrac{1}{2}\sin x + \cdots\right)\right]$$

$$\text{e)}\, f(x) = \begin{cases} a, & \text{v } (-0, t\rangle, \\ -a, & \text{v } (t, 2t\rangle. \end{cases}$$

$$\left[f(x) = \tfrac{4a}{\pi}\left(\sin \tfrac{\pi}{t}x + \tfrac{1}{3}\sin \tfrac{3\pi}{t}x + \tfrac{1}{5}\sin\tfrac{5\pi}{t}x + \cdots\right)\right]$$

Příklad 10.2. Rozviňte danou funkci v intervalu $(0, \pi)$ ve Fourierovu řadu sinovou a kosinovou

$$\text{a)}\, f(x) = x.$$

Řešení. Nejprve provedeme rozvoj ve Fourierovu řadu sinovou. Pro pomocnou funkci $F(x)$ platí

$$F(x) = \begin{cases} x, & x \in (0, \pi\rangle, \\ -(-x) = x, & x \in (-\pi, 0). \end{cases}$$

$\xi \in BV$

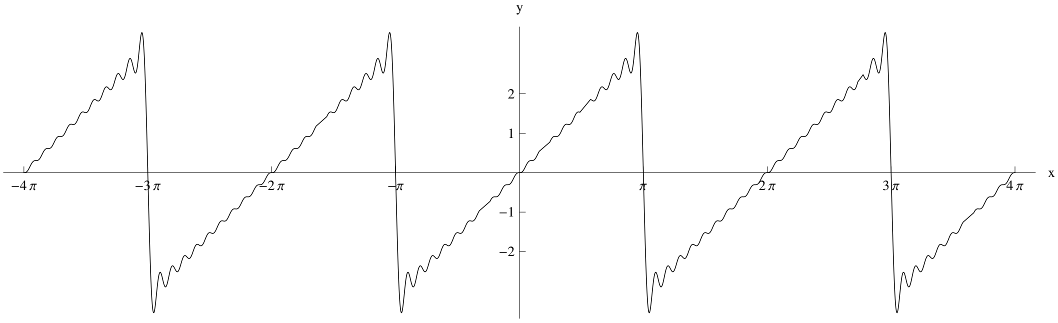
Výpočtem dostáváme Fourierovy koeficienty

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin nx\, dx = \frac{2}{\pi}\left(\left[-\frac{x}{n}\cos nx\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\, dx\right) = \\ &= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos nx + \frac{1}{n^2}\sin nx\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos n\pi + 0 + 0 - 0\right) = \\ &= -\frac{2}{n}(-1)^n. \end{aligned}$$

$$b_1 = 2,\ b_2 = -1,\ b_3 = \frac{2}{3},\ \ldots$$

Rozvoj v sinovou řadu je tedy

$$f(x) = 2\sin x - \sin 2x + \frac{2}{3}\sin 3x + \cdots, \text{pro } x \in (0, \pi\rangle.$$



Obr. 5. Liché periodické rozšíření funkce $x, x \in (0, \pi\rangle$

Nyní provedeme rozvoj ve Fourierovu řadu kosinovou. Pomocná funkce je ve tvaru

$$F(x) = \begin{cases} x, & x \in (0, \pi\rangle, \\ -x, & x \in (-\pi, 0\rangle. \end{cases}$$

Pro Fourierovy koeficienty platí

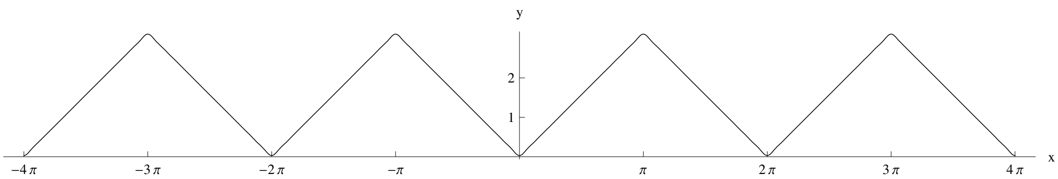
$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x\,dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^\pi = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{2} = \pi,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos nx\,dx = \frac{2}{\pi} \left(\left[\frac{x}{n} \sin nx\right]_0^\pi - \frac{1}{n} \int_0^\pi \sin nx\,dx \right) = \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{x}{n} \sin nx + \frac{1}{n^2} \cos nx\right]_0^\pi = \frac{2}{\pi} \left(0 + \frac{1}{n^2} \cos n\pi - 0 - \frac{1}{n^2}\right) = \\ &= \frac{2}{n^2\pi} \left[(-1)^n - 1\right]. \end{aligned}$$

$$a_1 = -\frac{4}{\pi},\ a_2 = 0,\ a_3 = -\frac{4}{9\pi},\ \ldots$$

Po dosazení dostáváme Fourierovu řadu kosinovou

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cos x - \frac{4}{9\pi} \cos 3x + \cdots, \text{pro } x \in \langle 0, \pi\rangle.$$



Obr. 6. Sudé periodické rozšíření funkce $x, x \in \langle 0, \pi\rangle$

3b)

Příklad 5.1.4. *Určete Fourierovu řadu sudého pokračování funkce* $f(x) = e^x$ *definované na intervalu* $[0, \pi]$.
Řešení: Tato úloha se týká poznámky 4.1.5, podle které je zřejmé, že hledáme rozvoj funkce f v kosinovou řadu. Jedná se o sudou funkci, tudíž

$$\begin{aligned} b_n &= 0 \text{ pro } n \in \mathbb{N}, \\ a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^x \, dx = \frac{2}{\pi}(e^{\pi} - 1), \\ a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^x \cos nx \, dx \text{ pro } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Dvojí aplikací metody per partes u výrazu a_n obdržíme

$$a_n = \frac{2}{\pi}\frac{1}{n^2}(e^{\pi}(-1)^n - 1) - \frac{2}{\pi}\frac{1}{n^2}\int_0^{\pi} e^x \cos nx \, dx.$$

Nyní můžeme řešit následující rovnici

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^x \cos nx \, dx(1 + \frac{1}{n^2}) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{n^2}(e^{\pi}(-1)^n - 1).$$

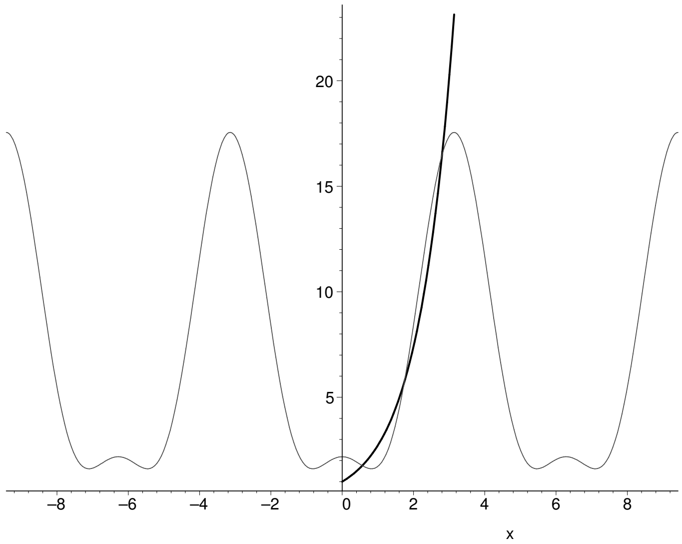
Rovnici vydělíme výrazem $\frac{n^2+1}{n^2}$ a obdržíme

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^x \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi}\frac{2}{n^2+1}(e^{\pi}(-1)^n - 1) \text{ pro } n \in \mathbb{N}.$$

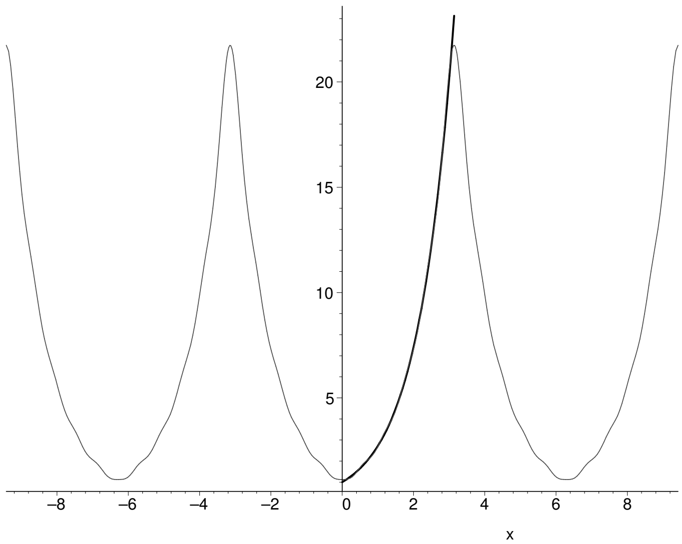
Tedy pro x z intervalu $[0, \pi]$ a jeho sudé pokračování platí

$$e^x = \frac{e^{\pi} - 1}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\pi}(-1)^n - 1}{n^2 + 1} \cos nx.$$

ta sudá funkce je $\in V([0,2\pi])$



Obr.5a: Graf $f(x) = e^x$ na int. $[0, \pi]$ a jejího sudého pokračování, pro n=2



Obr.5b: Graf $f(x) = e^x$ na int. $[0, \pi]$ a jejího sudého pokračování, pro n=10

součet číselné řady

(3c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin n}{n}.$$

Řešení. Položme

EBV [2025]

$$g(x) = |\sin x|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pak dle Věty 16.4.3 konverguje Fourierova řada funkce g ke g stejnoměrně na $\mathbb{R}$.

Spočtěme koeficienty této Fourieorovy řady. Jelikož je g sudá, jsou členy $b_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Dále máme

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \, dx = \frac{4}{\pi}$$

a

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos nx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} [\sin x \sin nx]_0^{\pi} - \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \cos x \sin nx \, dx \\ &= -\frac{2}{n\pi} \left[-\cos x \frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \sin x \frac{\cos nx}{n} \, dx \\ &= -\frac{2}{n\pi} \left[\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n} \right] + \frac{1}{n^2} a_n. \end{aligned}$$

Odtud plyne

$$a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ liché}, \\ -\frac{4}{\pi(n^2-1)}, & n \text{ sudé}. \end{cases}$$

Tedy

$$g(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} \cos 2kx, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pro $x = \frac{\pi}{2}$ pak dostáváme

$$1 = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{4k^2 - 1},$$

a tedy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{4k^2 - 1} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

♣

16.7.5. Příklad. Pro $a > 0$ rozviňte funkci

(3d)

$$f(x) = \cos ax, \quad x \in [0, \pi],$$

do Fourierovy řady na $\mathbb{R}$, která obsahuje pouze členy se $\sin nx$. Rozhodněte, zda řada konverguje na $\mathbb{R}$ a pokud ano, určete její součet. Pomocí této řady pak určete součet číselné řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k+1)}{(2k+1)^2-4}.$$

Řešení. Položme

$$g(x) = \begin{cases} \cos ax, & x \in (0,\pi) + 2k\pi, \\ 0, & x = k\pi, \\ -\cos ax, & x \in (-\pi, 0) + 2k\pi, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Pak g je lichá funkce s konečnou variací, a tedy její Fourierova řada konverguje ke g.

Při výpočtu jejích koeficentů máme $a_n = 0$ díky lichosti g a

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos ax \sin nx \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{a}\sin nx \sin ax\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{n}{a}\cos nx \sin ax \,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{2n}{\pi a}\int_0^{\pi} \cos nx \sin ax \\ &= \frac{-2n}{\pi a}\left[\frac{-1}{a}\cos nx \cos ax\right]_0^{\pi} + \frac{2n}{\pi a}\int_0^{\pi} \frac{n}{a}\sin nx \cos ax \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2n}{\pi a^2}\left[(-1)^n \cos(a\pi) - 1\right] + \frac{n^2}{a^2} b_n. \end{aligned}$$

Předpokládejme nejprve, že $a \notin \mathbb{N}$. Pak z předchozího plyne

$$b_n = \frac{2n}{\pi(a^2-n^2)}\left[(-1)^n \cos(a\pi) - 1\right], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pokud $a = k$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$, pak

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin kx \cos kx \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin 2kx = 0.$$

Tedy Fourierova řada g má tvar

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1, n\neq a}^{\infty} \frac{n}{a^2-n^2}\left[(-1)^n \cos(a\pi) - 1\right] \sin nx.$$

Nyní uvažujme $a = 2$ a $x = \frac{\pi}{2}$, pak máme

$$\begin{aligned} -1 = \cos\pi &= \frac{2}{\pi}\sum_{n=1, n\neq 2}^{\infty} [(-1)^n - 1]\sin n\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)(-1)^k(2k+1)}{4-(2k+1)^2} \\ &= \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k+1)}{(2k+1)^2-4}. \end{aligned}$$

Tedy

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k+1)}{(2k+1)^2-4} = \underline{-\frac{\pi}{4}}.$$

♣

3C

16.7.6. Příklad. Rozviňte funkci

$$f(x) = \operatorname{sign}(\sin 3x), \quad x \in [0, \pi],$$

do Fourierovy řady na $\mathbb{R}$, která obsahuje pouze členy s $\cos nx$. Rozhodněte, zda řada konverguje na $\mathbb{R}$ a pokud ano, určete její součet. Pomocí této řady pak určete součet číselné řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)(3k+2)}.$$

Řešení. Uvažujme sudé 2π-periodické rozšíření f na R, tj. funkci

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in \big((-\pi, -\frac{2}{3}\pi) \cup (-\frac{\pi}{3}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{3}) \cup (\frac{2}{3}\pi, \pi)\big) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \\ 0, & x = \frac{\pi}{3}k, k \in \mathbb{Z}, \\ -1, & x \in \big((-\frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{3}) \cup (\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi)\big) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Dle Věty 16.4.3 konverguje Fourierova řada g k funkci

3D

$$h(x) = \begin{cases} 1, & x = k\pi, k \in \mathbb{Z}, \\ g(x), & \text{jinak.} \end{cases}$$

Spočtěme koeficienty této řady. Jelikož je g sudá, platí $b_n = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Jinak máme

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\frac{2}{3}}$$

a

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos nx\,\mathrm{d}x - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} \cos nx\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \cos nx\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \underline{\frac{4}{\pi n}\left(\sin(\frac{n\pi}{3}) - \sin(\frac{2n\pi}{3})\right)}. \end{aligned}$$

Tedy

$$a_n = \begin{cases} 0, & n \in \{6k, 6k+1, 6k+3, 6k+5\}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ \frac{4\sqrt{3}}{\pi n}, & n = 6k+2, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ -\frac{4\sqrt{3}}{\pi n}, & n = 6k+4, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{cases}$$

Proto má Fourierova řada funkce g tvar

$$\frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = \frac{1}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{6k+2} \cos(6k+2)x - \frac{1}{6k+4} \cos(6k+4)x \right).$$

Pro $x = 0$ máme

$$\begin{aligned} 1 = h(x) &= \frac{1}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{6k+2} - \frac{1}{6k+4} \right) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)(3k+2)}. \end{aligned}$$

Odtud plyne

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)(3k+2)} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

♣

16.7.7. Příklad. Pro $\alpha \in [0, \pi]$ sečtěte řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n\alpha}{n^2}$.

Řešení. Uvažujme funkci $f(x) = \chi_{[-\alpha,\alpha]} \in ¶([-\pi, \pi])$ a rozviňme ji do Fourierovy řady. Máme

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2\alpha}{\pi}$$

a

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin nx}{n} \right]_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{2 \sin n\alpha}{n\pi}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Díky sudosti funkce f jsou pak všechny koeficienty b_n nulové.

Podle Věty **??** platí

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx = \frac{\pi}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \pi (a_n^2 + b_n^2).$$

Tedy dostáváme

$$2\alpha = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{4\alpha^2}{\pi^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \pi \frac{4 \sin^2 n\alpha}{n^2 \pi^2},$$

z čehož plyne

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2} = \frac{\alpha(\pi - \alpha)}{2}.$$

Řešení: Na intervalu $\langle -\pi, 0\rangle$ jsou části integrálů pro koeficienty a_n, b_n nulové.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin\, x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[-\cos\, x\right]_0^\pi = \frac{2}{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin\, x\, \cos\, nx \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \sin\,(1+n)x - \sin\,(1-n)x \,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{-\cos\,(1+n)x}{1+n} - \frac{\cos\,(1-n)x}{1-n}\right]_0^\pi = \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^n}{1-n} + \frac{1}{1+n}\right)$$

Pro $n > 1$ platí:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin\, x\, \sin\, nx \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \cos\,(1-n)x - \cos\,(1+n)x \,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin\,(1-n)x}{1-n} - \frac{\sin\,(1+n)x}{1+n}\right]_0^\pi = 0$$

Koeficient b_1 musíme spočítat odděleně: :

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^2\, x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi 1 - \cos\, 2x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left[x - \sin\, 2x\right]_0^\pi = \frac{1}{2}$$

Fourierova řada má tvar:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin\, x + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{1-n} + \frac{1}{1+n}\right)\cos\, nx =$$

$$= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin\, x - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\, 2nx}{4n^2-1}$$

Podle Dirichletovy věty je součet této řady roven $f(x)$ pro každé $x \in \langle -\pi, \pi\rangle$.

(38)

Příklad 6. Rozložte v kosinovou Fourierovu řadu funkci:

$$f(x) = \begin{cases} \cos\, x, & x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle \\ -\cos\, x, & x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right\rangle. \end{cases}$$

Řešení:

Protože rozkládáme v kosinovou řadu, jsou všechny koeficienty b_n nulové.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\, x \, dx - \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos\, x \,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left(\left[\sin\, x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\sin\, x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right) = \frac{4}{\pi}$$

sudá kopie f BV(⟨0,2π])

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos^2 x - \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2 x \, dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos nx \, dx - \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \cos nx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(1+n)x +$$

$$+ \cos(1-n)x \, \mathrm{d}x - \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(1+n)x + \cos(1-n)x \, \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{\sin(1+n)x}{1+n} + \frac{\sin(1-n)x}{1-n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{\sin(1+n)x}{1+n} + \frac{\sin(1-n)x}{1-n}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{pro } n \text{ liché} \\ -\frac{4}{\pi}\frac{1}{1-n^2}, & \text{pro } n = 4k+2 \\ \frac{4}{\pi}\frac{1}{1-n^2}, & \text{pro } n = 4k \end{cases}$$

Tento zápis lze sjednotit do jediného:

$$a_n = \frac{2}{\pi}(-1)^{\frac{n}{2}}\left((-1)^n + 1\right)\frac{1}{1-n^2}$$

Pak tedy, protože funkce je spojitá, platí podle Dirichletovy věty na celém intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n}{2}}\left((-1)^n + 1\right)\frac{\cos nx}{1-n^2} = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{1-n^2}$$

3g

Příklad 7. Rozložte v sinovou Fourierovu řadu funkci $f(x) = \cos 2x$ na intervalu $\langle 0, \pi\rangle$.

Řešení:

Protože rozkládáme v sinovou řadu, všechny koeficienty a_n jsou nulové.

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos 2x \sin nx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(2+n)x + \sin(n-2)x \, \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos(n+2)x}{n+2} - \frac{\cos(n-2)x}{n-2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^{n+1}+1}{n+2} + \frac{(-1)^{n+1}+1}{n-2}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left((-1)^{n+1}+1\right)\frac{n+2+n-2}{n^2-4} = \frac{2n}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}+1}{n^2-4}$$

Protože funkce je spojitá, podle Dirichletovy věty platí na celém intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$:

Lichá zobrazie je BV(⟨0,2π⟩)

$$b_2 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos 2x \sin 2x \, dx$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{2} \sin 4x \, dx = 0$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n\left((-1)^{n+1}+1\right)\sin nx}{n^2-4} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(2n+1)^2-4}\sin{(2n+1)x}$$

Příklad 8. Rozviňte ve Fourierovu řadu na intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$ funkci

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(\pi + x) & x \in (-\pi, 0) \\ \frac{1}{2}(\pi - x) & x \in \langle 0, \pi) \,. \end{cases}$$

Řešení:

Jde o lichou funkci, tedy všechny její koeficienty a_n jsou nulové. Spočteme koeficienty b_n:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{2}(\pi - x)\sin nx \, dx = \frac{1}{\pi}\left(\left[-\pi\frac{\cos nx}{n}\right]_0^\pi - \int_0^\pi x \sin nx \, dx\right) =$$

$$= \text{použiji metodu per partes} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[-\pi\frac{\cos nx}{n}\right]_0^\pi - \left[-x\frac{\cos nx}{n}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\cos nx}{n}\, dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[-\pi\frac{\cos nx}{n}\right]_0^\pi - \left[-x\frac{\cos nx}{n}\right]_0^\pi - \left[\frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^\pi\right) = \frac{1}{\pi}\frac{\pi}{n} = \frac{1}{n}$$

Podle Dirichletovy věty řada konverguje pro všechna $x \in (-\pi, \pi)$ kromě $x = 0$ k zadané funkci:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

Příklad 9. Funkci $f(x) = \pi^2 - x^2$ rozložte ve Fourierovu řadu na intervalu $(-\pi, \pi)$. Najděte součty řad:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Řešení:

Jde o sudou funkci, tedy všechny její koeficienty b_n jsou rovny nule. Spočtu koeficienty a_n:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(\pi^2 - x^2\right) \, dx = \frac{2}{\pi}\left[x\pi^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^\pi = \frac{2}{\pi}\left(\pi^3 - \frac{\pi^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi^2$$

4a

4. [8b] Mějme $f(x) = |\cos\frac{x}{2}|$ na $\mathbb{R}$.

   1. Rozviňte tuto funkci do 2π-periodické Fourierovy řady. Určete, k jaké funkci konverguje výsledná řada a proč.
   2. Dosazením $x = \pi$ sečtěte příslušnou číselnou řadu.
   3. Napište Parsevalovu rovnost pro funkci f a výpočtem určitého integrálu v ní sečtěte příslušnou číselnou řadu.

Řešení: Funkce je sudá a na intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$ se rovná funkci $\cos\frac{x}{2}$. Proto

$$b_n = 0\,, \qquad a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos\frac{x}{2}\,dx = \frac{2}{\pi}\left[2\sin\frac{x}{2}\right]_0^\pi = \frac{4}{\pi}\,,$$

a (v první rovnosti využijeme $2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$):

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos\frac{x}{2}\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos x\Big(n+\frac{1}{2}\Big) + \cos x\Big(n-\frac{1}{2}\Big)\,dx = \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{2n+1}\sin x\Big(n+\frac{1}{2}\Big) + \frac{2}{2n-1}\sin x\Big(n-\frac{1}{2}\Big)\right]_0^\pi = \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{2n+1}\underbrace{\sin\pi\Big(n+\tfrac{1}{2}\Big)}_{=(-1)^n} + \frac{2}{2n-1}\underbrace{\sin\pi\Big(n-\tfrac{1}{2}\Big)}_{=(-1)^{n+1}}\right) = \\
&= \frac{2}{\pi}(-1)^n\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1}\right) = \frac{2}{\pi}(-1)^n\frac{(-2)}{4n^2-1} = \frac{4}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\,.
\end{aligned}$$

Fourierova řada má proto tvar

$$F_f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos nx\,,$$

a protože zadaná funkce po částech $\mathcal{C}^1$ s vlastními jednostrannými limitami hodnot funkce i derivací ve všech „hrotech“, a navíc je spojitá na celém $\mathbb{R}$, konverguje Fourierova řada bodově pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a platí $F_f(x) = f(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.
Dosazení bodu $x = \pi$ dává

$$0 = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}(-1)^n\,,$$

tedy po úpravě

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\,.$$

Parsevalova rovnost (v našem případě $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi |f(x)|^2\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^\infty a_n^2$) dává:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos^2\frac{x}{2}\,dx = \frac{8}{\pi^2} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(4n^2-1)^2}\,,$$

tedy po úpravě

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(4n^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}\,.$$

4b

4. [8b] Funkce f splňuje $f(x) = \sinh ax$ na $\langle 0, \pi \rangle$, $a > 0$.

   1. Dodefinujte ji na celé $\mathbb{R}$ tak, aby ji bylo možno rozvinout do 2π-periodické Fourierovy řady, obsahující pouze siny.

   2. Spočtěte tuto řadu. Určete, k jaké funkci konverguje výsledná řada a proč.

   3. Napište Parsevalovu rovnost pro funkci f a výpočtem určitého integrálu v ní sečtěte příslušnou číselnou řadu.

Řešení: Funkce je sama o sobě lichá na $\langle -\pi, \pi \rangle$, není proto nutno ji nijak modifikovat. Z lichosti dostáváme

$$a_0 = a_n = 0\,, \qquad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sinh ax \sin nx\, dx = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Im}\int_0^\pi \frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}\, e^{inx}\, dx\,,$$

s využitím vlastností komplexní exponenciely. Spočtěme nejprve

$$\int_0^\pi e^{ax}\, e^{inx}\, dx = \frac{1}{a+in}\left(e^{a\pi}\, e^{in\pi} - 1\right) = \frac{a-in}{a^2+n^2}\left(e^{a\pi}\,(-1)^n - 1\right)\,,$$

tedy

$$\mathrm{Im}\int_0^\pi e^{ax}\, e^{inx}\, dx = \frac{n}{a^2+n^2}\left(1 + (-1)^{n+1} e^{a\pi}\right)\,.$$

Pouhou záměnou $(-a)$ za a dostaneme

$$\mathrm{Im}\int_0^\pi e^{-ax}\, e^{inx}\, dx = \frac{n}{a^2+n^2}\left(1 + (-1)^{n+1} e^{-a\pi}\right)\,,$$

a tedy

$$b_n = \frac{2}{\pi}\mathrm{Im}\int_0^\pi \frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}\, e^{inx}\, dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{a^2+n^2}\left[1 - 1 + (-1)^{n+1}(e^{a\pi} - e^{-a\pi})\right] = \frac{2}{\pi}\sinh a\pi\,\frac{(-1)^{n+1}n}{a^2+n^2}\,.$$

Fourierova řada má proto tvar

$$F_f(x) = \frac{2}{\pi}\sinh a\pi \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}n}{a^2+n^2}\sin nx\,,$$

a protože zperiodizovaná $\sinh ax$ (označme ji $\tilde{f}$) je funkce po částech $\mathcal{C}^1$ s vlastními jednostrannými limitami hodnot funkce i derivací ve všech bodech nespojitosti, konverguje Fourierova řada bodově pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a platí $F_f(x) = \frac{\tilde{f}(x+)+\tilde{f}(x-)}{2}$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.
Parsevalova rovnost (v našem případě $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{f}(x)|^2\, dx = \sum_{n=1}^\infty b_n^2$) dává:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sinh^2 ax\, dx = \left(\frac{2}{\pi}\sinh a\pi\right)^2 \sum_{n=1}^\infty \frac{n^2}{(a^2+n^2)^2}\,. \tag{2}$$

Protože (spočtěte si) $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sinh^2 ax\, dx = \left(\frac{\sinh 2a\pi}{2a\pi} - 1\right)$, $(a \neq 0\,!)$ dostaneme konečně:[2]

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{n^2}{(a^2+n^2)^2} = \frac{\pi^2}{4\sinh^2 a\pi}\left(\frac{\sinh 2a\pi}{2a\pi} - 1\right)\,, \qquad a \neq 0\,. \tag{3}$$

---

[2] Pro $a = 0$ dává Parsevalova rovnost (2) triviální identitu $0 = 0$, ale zkuste si ve vztahu (3) spočítat na obou stranách $\lim_{a\to 0}$. Co dostanete? Je to správně? A uměli byste odůvodnit, že limitní přechod uvnitř nekonečného součtu je korektní? :-)

5