11. cvičení – Fourierovy řady

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Definice 1. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je 2π-periodická funkce taková, že $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x < \infty$. Čísla

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \,\mathrm{d}x, \qquad k \in \mathbb{N}_0,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \,\mathrm{d}x, \qquad k \in \mathbb{N},$$

se nazývají *Fourierovy koeficienty funkce* f.

Řadu

$$\mathcal{S}f = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

nazýváme *Fourierovou řadou funkce* f. Píšeme $\mathcal{S}f \sim f$.

($\mathcal{S}_n f = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$, jde o částečné součty.)

Věta 2 (Jordanovo – Dirichletovo kritérium)**.** Nechť $f \in \mathcal{P}([0, 2\pi])$ je funkce s **konečnou variací** na intervalu $[0, 2\pi]$.

1. Nechť $x \in \mathbb{R}$. Pak má funkce f v bodě x vlastní limitu zleva $f(x-)$ i zprava $f(x+)$ a platí
$$\mathcal{S}f(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$
2. Je-li navíc f **spojitá** na otevřeném intervalu (a, b), pak
$$\mathcal{S}_n f \overset{loc}{\rightrightarrows} f \qquad \text{na } (a, b).$$

Věta 3 (Dini)**.** Nechť $f \in \mathcal{P}([0, 2\pi])$ je funkce a $x \in \mathbb{R}$. Existují-li vlastní jednostranné limity $f(x-)$ a $f(x+)$ a také vlastní limity

$$\lim_{t \to x-} \frac{f(t) - f(x-)}{t - x}, \qquad \lim_{t \to x+} \frac{f(t) - f(x-)}{t - x},$$

pak

$$\mathcal{S}f = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

Speciálně, pokud f má **konečné jednostranné derivace** v x, pak $\mathcal{S}f(x) = f(x)$.

Poznámka 4. Je-li funkce $f \in \mathcal{P}([0, 2\pi])$ po částech **monotónní** na (a, b) nebo po **částech třídy** $\mathcal{C}^1$ na (a, b), pak pro každé $x \in (a, b)$ platí

$$\mathcal{S}f(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

Fakta

Pro $m, n \in \mathbb{N}_0$:

$$\int_0^{2\pi} \sin nx \,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \cos mx \,\mathrm{d}x = 0, \;\; m, n \geq 1, \qquad \int_0^{2\pi} \sin nx \cos mx \,\mathrm{d}x = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx \,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx \,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \pi, & n = m. \end{cases}$$

Hinty

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$e^{a+bi} = e^a(\cos(b) + i\sin(b))$$
$$\sin(nx) = \operatorname{Im} e^{inx} = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \qquad \cos(nx) = \operatorname{Re} e^{inx} = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}$$

Algoritmus

1. **Načrtneme** funkci včetně jejího 2π-periodického rozšíření.
2. Spočteme a_0, a_n, b_n (dáváme pozor na **podmínky**). Není funkce **sudá/lichá**?
3. Sestavíme **Fourierovu řadu**.
4. Zkontrolujeme původní funkci. Je spojitá? Je BV? Je C^1? Z vět pak vyplyne **konvergence** Fourierovy řady.
5. **Dosadíme** vhodný bod do číselné řady a využijeme konvergenci.

Algoritmus pro sinové/kosinové řady

1. Načrtneme funkci a uděláme její **lichou/sudou kopii**. Až **pak rozšíříme** 2π-periodicky.
2. Postupujeme jako předtím. Využíváme lichosti/sudosti funkce.

Příklady

1. Rozviňte funkci do Fourierovy řady. Rozhodněte, zda řada konverguje stejnoměrně (lok. stejnoměrně) na největších možných podintervalech $[0, 2\pi]$ (příp. $\mathbb{R}$) a určete její součet. Určete pak součet zadaných číselných řad.

   (a) $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in (-\pi, \pi]$, $\quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$

   (b) ♡ $f(x) = \cos^6 x$, $x \in (-\pi, \pi]$

   (c) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\pi, 0] \\ x, & x \in (0, \pi]. \end{cases}$

   (d) $f(x) = \pi^2 - x^2$, $x \in (-\pi, \pi]$, $\quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$

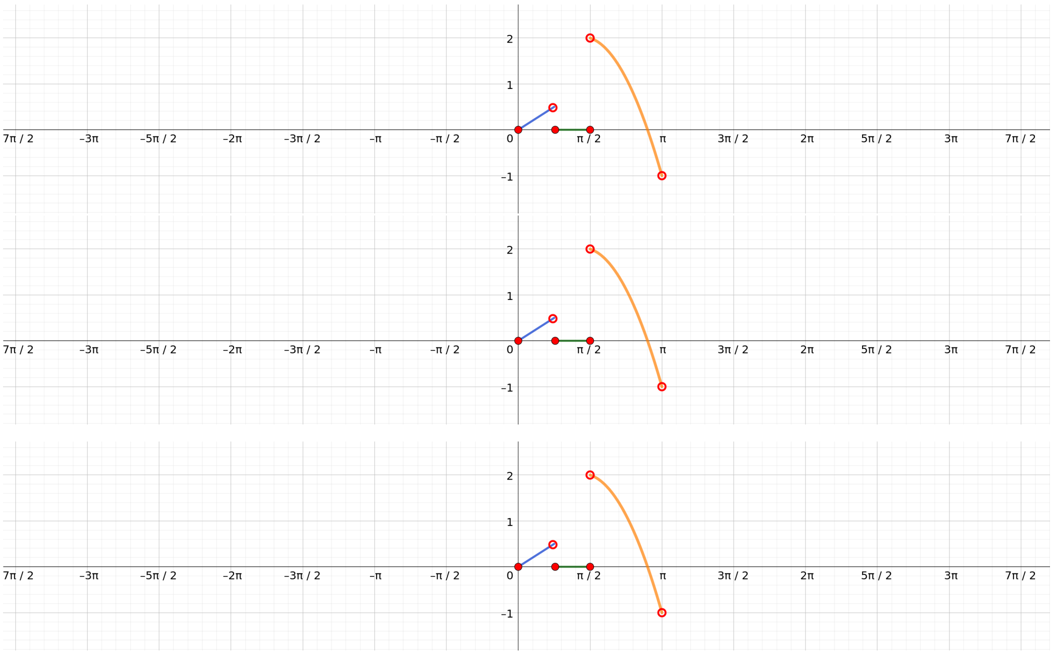
   (e) ❄ $f(x) = e^x$, $x \in (-\pi, \pi]$, $\quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$

   (f) ✻ $f(x) = \sin(3x) + 4x$, $x \in (-\pi, \pi]$, $\quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\sin n}{n}$

   (g) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, \pi) \\ 0, & x \in (\pi, 2\pi) \\ \frac{1}{2}, & x = 0, \pi, 2\pi \end{cases}$

   (h) ❀ $f(x) = x^2$ $x \in [0, 2\pi)$,

2. Dokreslete funkci na π-periodickou, 2π-periodickou lichou a 2π-periodickou sudou:



3. Rozviňte funkci do sinové/kosinové Fourierovy řady. Rozhodněte, zda řada konverguje na $\mathbb{R}$ a určete její součet. Určete pak součet číselných řad.

   (a) Sinovou i kosinovou $f(x) = x$ na $[0, \pi)$

   (b) ❀ Kosinovou řadu $f(x) = e^x$ na $[0, \pi)$

   (c) ❀ Kosinovou řadu $f(x) = \sin x$ na $[0, \pi)$
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin n}{n}$$

   (d) ❄ Sinovou řadu $f(x) = \cos(ax)$, $a > 0$ na $[0, \pi)$
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{(2n+1)^2 - 4}$$

   (e) Kosinovou řadu $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin 3x)$ na $[0, \pi)$
   $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)}$$

   (f) ★ Kosinovou řadu
   $$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ -\cos x, & x \in (\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

   (g) Sinovou řadu $f(x) = \cos 2x$ na $[0, \pi)$

4. Zkouškové písemky doc. Rokyty:

   https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/

   (a) ♡ $f(x) = |\cos \frac{x}{2}|$ na $\mathbb{R}$. Rozviňte tuto funkci do 2π-periodické Fourierovy řady. Určete, k jaké funkci konverguje výsledná řada a proč. Dosazením $x = \pi$ sečtěte příslušnou číselnou řadu.

   (b) ❄ $f(x) = \sinh ax$ na $[0, \pi)$, $a > 0$. Dodefinujte ji na celé $\mathbb{R}$ tak, aby ji bylo možno rozvinout do 2π-periodické Fourierovy řady, obsahující pouze siny. Tuto řadu spočtěte. Určete, k jaké funkci konverguje výsledná řada a proč.

5. K jaké funkci konverguje následující funkce? Zakreslete.

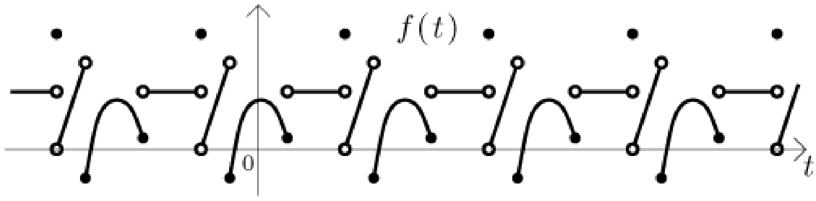


Figure 1: http://math.feld.cvut.cz/mt/txte/3/txc3ea3f.htm

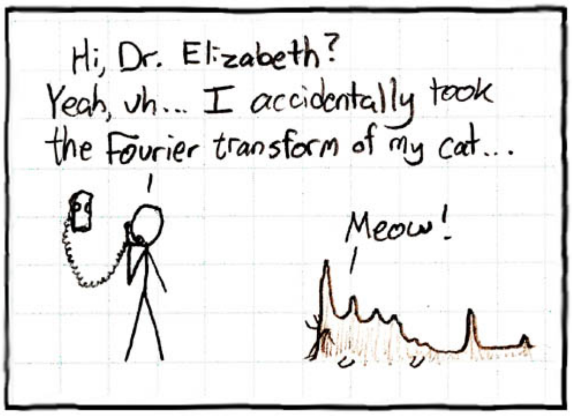


Figure 2: https://xkcd.com/26/

(1b) $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$
(1e) 2x per partes nebo komplex. exponenciela
(1f) $\sin 3x = \sin 3x$
(1h) pozor na interval
(3b) 2x per partes nebo komplex. exponenciela
(3c) 2x per partes nebo komplex. exponenciela nebo vzorce
(3d) 2x per partes nebo komplex. exponenciela, pozor na podmínky
(3f) 2x per partes nebo komplex. exponenciela nebo vzorce, pozor na podmínky
(4a) např. vzorce
(4b) předpis pro sinh + komplexní integrál