10. cvičení – AC, BV a Lip funkce

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

1 BV

Definice 1. Nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. *Variaci funkce f na intervalu* $[a, b]$ definujeme předpisem

$$V_a^b(f) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|;\ \{x_i\}_{i=0}^{n} \text{ je dělení } [a, b] \right\}.$$

Řekneme, že funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ má na intervalu $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *konečnou variaci*, jestliže $V_a^b(f) < \infty$.

Množinu všech funkcí s omezenou variací na intervalu $[a, b]$ značíme $BV([a, b])$.

(Značení: $V_a^b(f)$ odpovídá $V(f; a, b)$ z přednášky.)

Věta 2. Nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ a $c \in (a, b)$. Pak $f \in BV([a, b])$ právě tehdy, když $f \in BV([a, c])$ a $f \in BV([c, b])$. Navíc

$$V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f).$$

Úloha 3. Spočtěte variace následujících funkcí:

1.♡ x^2 na $[0, 1]$,
2. x^2 na $[-1, 1]$,
3. $\sin x$ na $[0, 10\pi]$,
4. $\frac{1}{2}\lfloor x \sin \frac{\pi x}{2} \rfloor$ na $[-4, 4]$

https://www.geogebra.org/calculator/ccpnefwv

Úloha 4 (✿)**.** Ukažte, že Dirichletova funkce

$$f = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{Q}, \end{cases}$$

nemá konečnou variaci na $[0, 1]$.

Úloha 5 (❀)**.** Ukažte, že funkce

$$f = \begin{cases} x \cos \frac{\pi}{2x}, & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

nemá konečnou variaci na $[0, 1]$.
https://www.geogebra.org/calculator/wsv9c6hc

Věta 6. Nechť f je spojitá na $[a,b]$ a f' existuje a je omezená na (a,b). Pak $f \in BV([a,b])$.

(Důkaz např. tady, Thm. 3.9.: `https://www.whitman.edu/documents/Academics/Mathematics/grady.pdf`.)

Úloha 7 (❄). Ukažte, že funkce

$$f = \begin{cases} x^2 \sin \frac{2\pi}{x}, & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

má konečnou variaci na $[0,1]$.

`https://www.geogebra.org/calculator/gpm9cqbk`

Úloha 8. Dokažte nebo najděte protipříklad

1.♡ $f \in BV[a,b] \Rightarrow |f| \in BV[a,b]$?

2.★ $|f| \in BV[a,b] \Rightarrow f \in BV[a,b]$?

Úloha 9. Dokažte nebo najděte protipříklad. Nechť $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

1. jestliže f je omezená, pak je BV,

2.✻ jestliže f je BV, pak je omezená.

Věta 10. Nechť $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Pak $f \in BV([a,b])$ právě tehdy, když existují neklesající funkce $g, h : [a,b] \to \mathbb{R}$ takové, že $f = g - h$.

Úloha 11. Ukažte, že jestliže $\alpha \in \mathbb{R}$ a $f, g \in BV([a,b])$, pak i $f + g \in BV([a,b])$ a $\alpha f \in BV([a,b])$

Úloha 12. Nakreslete Vennův diagram pro funkce spojité, omezené a BV na $[a,b]$.

---

2 *AC*

Definice 13. Řekneme, že funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je *absolutně spojitá* na intervalu $[a,b]$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každou konečnou posloupnost bodů $a \le a_1 \le b_1 \le \cdots \le a_n \le b_n \le b$ máme

$$\sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j) < \delta \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} |f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon.$$

Množinu všech absolutně spojitých funkcí na intervalu $[a,b]$ značíme $AC([a,b])$.

Úloha 14 (✻). Ukažte z definice, že funkce $f(x) = x$, $g(x) = x^2$ a $h(x) = \sqrt{x}$ jsou absolutně spojité na $[0,1]$.

Úloha 15 (♡)**.** Ukažte, že Cantorova funkce (která je spojitá i stejnoměrně spojitá) je na intervalu $[0, 1]$ BV, ale není absolutně spojitá.
https://cs.wikipedia.org/wiki/Cantorova_funkce

Úloha 16. Najděte funkci, která není absolutně spojitá, ale má konečnou variaci.

Úloha 17. Rozhodněte, zda má AC funkce nutně omezenou derivaci.

Úloha 18 (❄)**.** Dokažte nebo najděte protipříklad

- $f \in AC[a, b] \Rightarrow |f| \in AC[a, b]$?
- $|f| \in AC[a, b] \Rightarrow f \in AC[a, b]$?

Úloha 19 (❀)**.** Nechť $f, g \in AC([a, b])$. Ukažte, že pak i $fg \in AC([a, b])$.

---

3 Lip

Definice 20. Nechť (X, ρ) a (Y, σ) jsou metrické prostory, $f : X \to Y$ a $K > 0$. Řekneme, že zobrazení f je K-lipschitzovské, jestliže

$$\forall x, y \in X : \sigma(f(x), f(y)) \leq K\rho(x, y).$$

Řekneme, že f *lipschitzovské*, jestliže existuje $K > 0$ takové, že f je K-lipschitzovské.

Pro $X = Y = \mathbb{R}$ dostaneme

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

Poznámka 21. Zatímco AC a BV funkce pracovaly s uzavřeným a omezeným intervalem $[a, b]$, tak u lipschitzovských funkcí může být interval **otevřený i neomezený**.

Úloha 22. Ukažte, že funkce jsou lipschitzovské

1. ❄ $|x|$ na $[-1, 1]$
2. ✽ x^2 na $[1, 2]$
3. x na $\mathbb{R}$

Úloha 23 (✤)**.** Ukažte, že funkce nejsou lipschitzovské

1. x^2 na $\mathbb{R}$
2. $\sqrt{x}$ na $[0, 1]$

Úloha 24. Nechť X je množina slov (ne nutně smysluplných) skládající se z 10 písmen (používáme 26 prvkovou anglickou abecedu). Metriku ρ definujme jako počet pozic s rozdílnými písmeny. Např.

$$\rho(JEDNOROZCI, CHOBOTNICE) = 8,$$
$$\rho(LOSANGELES, LOUISVILLE) = 7,$$
$$\rho(ABCXYZQRTY, AACXYUQRTY) = 2.$$

Pro slovo z 10 písmen $x = x_1, x_2, \dots x_{10}$ definujme zobrazení

$$f(x) = a, x_2, \dots, x_{10}$$

(první písmeno jsme nahradili písmenem a).

Rozhodněte, zda je f lipschitzovské zobrazení.

Úloha 25. Nechť f, g jsou lipschitzovské na $\mathbb{R}$. Ukažte, že je lipschitzovská i funkce

1. $f + g$
2. $f(g)$

Úloha 26 (✿). Ukažte, že lipschitzovská funkce má konečnou variaci (na intervalu $[a, b]$).

Úloha 27. Najděte funkci, která je AC, ale není Lip.

Úloha 28. Nakreslete Vennův diagram pro funkce spojité, lipschitzovské, stejnoměrně spojité a absolutně spojité na $[a, b]$.

Úloha 29. Vyslovte (a zdůvodněte) hypotézu o vztahu omezených a lipschitzovských funkcí. Jsou tam nějaké podmínky?

Úloha 30 (♡). Je nějaký vztah mezi lipschitzovskými a diferencovatelnými funkcemi na $[a, b]$?

(3.1) jak se spočítá variace monotónní funkce?
(4) volte dělení na střídačku z $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
(5) volte $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{2n}$
(7) Věta 6
(8.1) z definice a $||a| - |b|| \leq |a - b|$
(8.2) zkuste upravit Dirichletovu funkci
(9) $|f(x)| \leq |f(a)| + |f(x) - f(a)|$

(14.1) $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ (14.2) Pro ε najděte bod $c = \varepsilon^2/4$. Dělení rozdělte na intervaly před bodem c a po něm. Při odhadu 2. části rozšiřte $\sqrt{b_j} + \sqrt{a_j}$. (15) Jak vzniká Cantorova množina? Umíme ji pokrýt dělením? Ve kterých bodech roste Cantorova funkce? (18.1) z definice a $||a| - |b|| \leq |a - b|$
(18.2) zkuste upravit Dirichletovu funkci
(19) $ab - cd = ab - ad + ad - cd$

(22.1) $||a| - |b|| \leq |a - b|$
(22.2) $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$
(23) Problém vzniká s neomezenou derivací.
(26) Z definice.
(30) Lagrangeova věta o střední hodnotě.