9. cvičení – Mocninné řady – sčítání řad 2

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (Abel)**.** Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ je mocninná řada s poloměrem konvergence $R > 0$. Nechť navíc $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ konverguje. Pak mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ konverguje stejnoměrně na $[x_0, x_0+R]$ a

$$\lim_{r\to R-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

(Věta platí i pro variantu $[x_0 - R, x_0]$.)

Algoritmus

1. Přepíšeme řadu na tvar $\sum a_n x^n$ s tím, že nás zajímá konkrétní x. Může být výhodné užít např. x^{2n+1} místo x^n. (Pokud tam není žádné hezké číslo na n-tou, může to být 1^n).
2. Chováme se k příkladu jako minule: poloměr konvergence, součet pomocí derivace nebo integrace…
3. Do výsledného součtu dosadíme naše konkrétní x - pokud je na kraji poloměru konvergence, použijeme Abelovu větu.
4. Pokud to není v zadání, tak nemusíme vyšetřovat chování na celém poloměru konvergence a v obou krajních bodech - jde nám jen o jedno konkrétní x.

Příklady

1. Sečtěte následující řady:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+1)}{2^k}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) \frac{1}{5^{2n}}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k^3}{3^k}$

(e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n^2+2n) \frac{1}{3^n}$

(h)♡ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$

(i)❀ $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \cdots$

2. Sečtěte následující řady (bonus k minulému cviku):

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+5}}{n!}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$

(c)❄ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n(n+2) x^n$

(d)★ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (n-1)(n+3) x^{2n}$

Bonus

3. ♡ Příklad máme z: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~cuth/MA4_cviceni.pdf

Řekneme, že funkce je *vyjádřitelná na okolí 0 jako mocninná řada (MR)*, pokud existuje $\delta > 0$ a posloupnost $\{a_n\}$ splňující, že $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x \in (-\delta, \delta)$.

Uvažujte f definovanou na okolí 0. Určete, jaké implikace mezi následujícími tvrzeními platí.

(a) f je MR;
(b) f je MR a existuje $k \in \mathbb{N}_0$: $f^{(k)}(0) \neq 0$;
(c) existuje $k \in \mathbb{N}_0$ a funkce g, která je MR, $g(0) \neq 0$ tak, že na nějakém okolí 0 platí $f(x) = x^k g(x)$;
(d) $f \in C^{\infty}(-\delta, \delta)$ pro nějaké $\delta > 0$.

(1h) $4n^2 - 1 = (2n+1)(2n-1)$
(1i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-x^{3n+1}}{3n+1}$, pak parc. zlomky
(2c) vytkněte $1/x$ a roztrhněte interval konvergence
(2d) analogicky 2c
(3) $d \not\Rightarrow a$, $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ pro $x > 0$, jinak $f(x) = 0$.