8. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/∼kuncova/, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Derivováním člen po členu sečtěte následující řady:

   (a) $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$

   Řešení: Označme

$$f(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Poloměr konvergence je roven 1.

Formálním derivováním člen po členu dostaneme řadu

$$1 + x^2 + x^4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n},$$

což je geometrická řada s prvním členem 1 a kvocientem x^2. Zároveň je to mocninná řada s koeficienty Uvnitř kruhu konvergence platí

$$f'(x) = 1 + x^2 + x^4 + \dots = \frac{1}{1-x^2}.$$

Rozkladem na parciální zlomky nebo z tabulky máme

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + K,$$

tudíž

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + K.$$

Jelikož

$$f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^{2n+1}}{2n+1} = 0,$$

a zároveň

$$f(0) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+0}{1-0} + K,$$

dohromady vyjde $K = 0$ a tedy

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}, \qquad |x| < 1.$$

Pro krajní body platí, že řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^{2n+1}}{2n+1}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}$$

divergují (tedy nemá smysl je sčítat).

(b) $x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^4}{4} + \cdots$

Řešení:

Označme

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Poloměr konvergence je pak 1. Na $(-1, 1)$ můžeme zderivovat

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{x^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Geometrickou řadu můžeme sečíst, tedy

$$f'(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Po zintegrování dostaneme

$$f(x) = -\ln|1-x| + K.$$

Můžeme dosadit 0:

$$-\ln|1-0| + K = f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0}{n} = 0$$

a dostaneme $K = 0$. Tedy

$$f(x) = -\ln|1-x|, \qquad x \in (-1, 1).$$

Krajní body: Pro $x = 1$ řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje.

Pro $x = -1$ řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konverguje z Leibnize. Pro její součet použijeme Abelovu Větu s $r = -1$. Pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \lim_{x \to -1+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \lim_{x \to -1+} -\ln|1-x| = -\ln 2.$$

Závěr:

$$f(x) = -\ln|1-x|, \qquad x \in [-1, 1).$$

2. Integrováním člen po členu sečtěte následující řady:

   (a) $x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots$
   Řešení: Máme sečíst řadu
   $$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k.$$
   Řada má poloměr konvergence jedna. Platí, že
   $$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k = x \cdot \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}.$$
   Označme
   $$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k$$
   Potom na kruhu konvergence platí integrováním člen po členu, že
   $$f(x) = F'(x), \qquad \text{kde} \qquad F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+1} = \frac{x}{1-x}.$$
   Odtud vyplývá, že
   $$f(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}, \qquad |x| < 1$$
   a odtud
   $$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k = xf(x) = \frac{x}{(1-x)^2}, \qquad |x| < 1.$$
   V krajních bodech $x = \pm 1$ řada diverguje (nutná podmínka konvergence).

   (b) $1 \cdot 2x + 2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 4x^3 + \cdots$
   Řešení: Máme sečíst řadu
   $$\sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)x^k.$$
   Poloměr konvergence je 1. Podle věty o integraci člen po členu platí
   $$\sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)x^k = \left(\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k+1}\right)' = \left(x^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}\right)' =$$
   $$= \left(x^2 \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} x^k\right)'\right)' = \left(x^2 \cdot \left(\frac{x}{1-x}\right)'\right)' = \left(x^2 \cdot \frac{1}{(1-x)^2}\right)' =$$
   $$= \frac{2x(1-x)^2 + 2x^2(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{2x - 4x^2 + 2x^3 + 2x^2 - 2x^3}{(1-x)^4} = \frac{2x}{(1-x)^3}, \qquad |x| < 1.$$
   V krajních bodech $x = \pm 1$ řada diverguje (nutná podmínka konvergence).

3. Derivováním nebo integrováním člen po členu sečtěte následující řady:

(a) $x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \cdots$
Označme

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Poloměr konvergence je 1.
Derivováním člen po členu dostaneme řadu

$$1 - x^2 + x^4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

což je geometrická řada s prvním členem 1 a kvocientem $-x^2$. Poloměr konvergence je též 1.
Uvnitř kruhu konvergence platí

$$f'(x) = 1 - x^2 + x^4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2}.$$

Platí, že

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2},$$

tudíž

$$f(x) = \arctan x + K.$$

Jelikož

$$\arctan 0 + K = f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{0^{2n+1}}{2n+1} = 0,$$

tak $K = 0$.
Máme tedy

$$f(x) = \arctan x, \qquad |x| < 1.$$

V krajních bodech

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\pm 1)^{2n+1}}{2n+1} = 0$$

konverguje z Leibnize. Aplikujme Abelovu větu. Pak

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1^{2n+1}}{2n+1} = \lim_{x \to 1-} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \lim_{x \to 1-} \arctan x = \frac{\pi}{4}.$$

a

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = \lim_{x \to -1+} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \lim_{x \to -1+} \arctan x = -\frac{\pi}{4}.$$

Závěr:

$$f(x) = \arctan x, \qquad x \in [-1, 1].$$

(b) $x - 4x^2 + 9x^3 - 16x^4 + \cdots$

Řešení: Máme sečíst řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} k^2 x^k$$

Řada má poloměr konvergence 1.

Podle věty o integrování člen po členu, máme pro $|x| < 1$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} k^2 x^k &= x \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} k^2 x^{k-1} = x \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} k x^k \right)' \\
&= x \cdot \left(x \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} k x^{k-1} \right)' = x \cdot \left(x \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} x^k \right)' \right)' \\
&= x \cdot \left(x \cdot \left(\frac{x}{1+x} \right)' \right)' = x \cdot \left(x \cdot \left(\frac{(1+x) - x}{(1+x)^2} \right) \right)' = x \cdot \left(\frac{x}{(1+x)^2} \right)' \\
&= x \cdot \left(\frac{(1+x)^2 - 2x(1+x)}{(1+x)^4} \right) = x \cdot \frac{1 - x^2}{(1+x)^4} = \frac{x(1-x)}{(1+x)^3}.
\end{aligned}$$

V krajních bodech $x = \pm 1$ řada diverguje (nutná podmínka konvergence).

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) x^n$

Řešení:

Poloměr konvergence řady je 1. Integrováním člen po členu dostaneme pro $|x| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} \right)' = \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

V krajních bodech $x = \pm 1$ řada diverguje (nutná podmínka konvergence).

4. Rozviňte do mocninné řady (o středu 0) funkce:

(a) $\displaystyle\frac{1}{1+x^3}$

Řešení: Dosadíme do geometrické řady $\frac{1}{1-y} = \sum_{n=0}^{\infty} y^n$ pro $y \in (-1, 1)$. Tedy

$$\frac{1}{1+x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n}.$$

Platí pro $x \in (-1, 1)$.

(b) $\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

Řešení: Máme

$$\frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{x^2-1+2}{x^2-1} = 1 + \frac{-2}{1-x^2}.$$

Po dosazení do geometrické řady vyjde

$$1 + \frac{-2}{1-x^2} = 1 - 2\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}.$$

Konverguje pro $x \in (-1, 1)$.

(c) $\arctan x$

Řešení: Označme $f(x) = \arctan x$. Pak $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Z geometrické řady máme

$$f'(x) = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Pak

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + c.$$

Víme, že $f(0) = \arctan(0) = 0$. Tedy

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{0^{2n+1}}{2n+1} + c = c.$$

Tedy $c = 0$ a můžeme psát

$$\arctan x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

na poloměru konvergence, tedy $x \in (-1, 1)$.

V krajních bodech řada konverguje z Leibnize, použijeme tedy Abelovu větu a dostaneme:

$$\lim_{x\to 1-} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \lim_{x\to 1-} \arctan x = \arctan 1 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$$

Analogicky

$$\arctan(-1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{-1}{2n+1}.$$

Závěr:

$$\arctan x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

na $x \in [-1, 1]$.

(d) $(1+x)\ln(1+x)$

Řešení: Označme $g(x) = \ln(1+x)$. Pak $g'(x) = \frac{1}{1+x}$, tedy z geometrické řady je

$$g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

pro $x \in (-1,1)$.

Po integraci dostaneme

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + c.$$

Dosadíme

$$g(0) = \ln 1 = 0 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{0^{n+1}}{n+1} + c = c,$$

tedy $c = 0$. Máme tedy $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ pro $x \in (-1,1)$.

Pro původní funkci platí

$$(1+x)\ln(1+x) = (1+x)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+2}}{n+1}.$$

Po úpravě

$$(1+x)\ln(1+x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1}(-1)^n \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) = x + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$$

pro $x \in (-1,1)$.

Pro $x = -1$ není původní funkce definovaná, ale pro $x = 1$ použijeme Abelovu větu (řada konverguje srovnáním s $1/n^2$).

$$\lim_{x\to 1-} \lim_{x\to 1-} (1+x)\ln(1+x) = 2\ln 2 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{1^{n+1}}{n(n+1)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Závěr:

$$(1+x)\ln(1+x) = x + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$$

pro $x \in (-1,1]$.

(e) $\dfrac{1}{3-2x}$

Řešení: Vytkneme a pak aplikujeme geometrickou řadu.

$$\frac{1}{3-2x} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}x} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}x\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{3^{n+1}}$$

pro $x \in (-3/2, 3/2)$.

(f) $\dfrac{1}{(1-x)^2}$

Řešení: Položme $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$. Pak $F(x) = \frac{1}{1-x}$. Z geometrické řady

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad x \in (-1,1).$$

Po zderivování máme

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

pro $x \in (-1,1)$.

(g) $\sin^2 x$

Řešení: Platí

$$f(x) = \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos(2x)).$$

Z Taylorova rozvoje pro kosinus je

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n},$$

$x \in \mathbb{R}$.

(h) $\dfrac{1}{(1+x^2)^2}$

Řešení: opsáno z https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf.

Z geometrické řady máme

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}.$$

Řada absolutně konverguje pro $x \in (-1,1)$. Pro její koeficienty navíc platí

$$a_n = \begin{cases} (-1)^k, & n = 2l, \\ 0, & n = 2l+1, \end{cases}$$

kde $l \in \mathbb{N}_0$.

Použijeme vzorec pro násobení řad.

$$f(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k a_{n-k}x^{n-k}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

kde

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}.$$

Uvažujme lichá $n = 2m + 1$. Pak čísla k a $2m + 1 - k$ jsou vždy jedno liché a jedno sudé, tedy jeden z indexů a_k a a_{2m+1-k} je nulový a $a_k \cdot a_{2m+1-k} = 0$.
Nechť $n = 2m$ je sudé. Pak čísla k a $2m - k$ jsou buď obě sudá nebo obě lichá. Pokud jsou obě lichá, pak $a_k a_{2m-k} = 0 \cdot 0 = 0$.
Konečně pokud jsou sudá, pak

$$a_k a_{2m-k} = (-1)^{k/2}(-1)^{m-k/2} = (-1)^m.$$

Sudých čísel je navíc v množině $\{0, 1, 2, \dots, 2m\}$ právě $m + 1$. Tedy

$$b_n = b_{2m} = (-1)^m(m + 1).$$

Dohromady je řada tvaru

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n + 1)x^{2n}, \quad x \in (-1, 1).$$

Zkouškové příklady

5. Sečtěte řadu

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n(n+1)}$

   Řešení: Poloměr konvergence je roven 1.
   Položme

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n(n+1)} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$$

   Zderivujme funkci $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$. Dostáváme

$$g''(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty}(n + 1)\frac{x^n}{n(n + 1)}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1 - x}$$

   Pak

$$g'(x) = -\ln|1 - x| + K.$$

   Jelikož jsme na intervalu $(-1, 1)$, můžeme psát

$$g'(x) = -\ln(1 - x) + K.$$

   Pro $x = 0$ máme

$$-\ln(1 - 0) + K = g'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = 0,$$

tedy $K = 0$.
Po zintegrování (per partes):

$$g(x) = x - (x-1)\ln(1-x) + M.$$

Po dosazení $x = 0$ dostaneme

$$g(0) = 0 - (0-1)\ln(1-0) + M = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0^{n+1}}{n(n+1)} = 0,$$

tedy $M = 0$.
Dohromady pro $x \in (-1, 1)$:

$$f(x) = xg(x) = x^2 - x(x-1)\ln(1-x).$$

V krajních bodech řada $x = \pm 1$ konverguje (srovnání s $1/n^2$). Dle Abelovy věty máme:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^{n+2}}{n(n+1)} = \lim_{x \to 1-} x^2 - x(x-1)\ln(1-x) = 1 + 0$$

a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2}}{n(n+1)} = \lim_{x \to -1+} x^2 - x(x-1)\ln(1-x) = 1 - 2\ln 2.$$

Dohromady pro $x \in [-1, 1]$:

$$f(x) = x^2 - x(x-1)\ln(1-x).$$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \frac{x^{n+2}}{n!}$

Řešení:
Poloměr konvergence je roven ∞.
Položme

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \frac{x^{n+2}}{n!}.$$

Využijeme součtu řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.
Mějme

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \frac{x^{n-1}}{n!}.$$

Pak $f(x) = x^3 g(x)$.

Máme

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \frac{x^{n-1}}{n!} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} n \frac{x^n}{n!}\right)' = \left(x \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{x^{n-1}}{n!}\right)' = \left(x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)'\right)'.$$

Poslední sumu nahradíme $e^x - 1$ (platí pro $x \in \mathbb{R}$) a zpátky proderivujeme:

$$g(x) = \left(x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)'\right)' = \left(x\,(e^x-1)'\right)' = (xe^x)' = e^x(x+1)$$

Pro $x \in \mathbb{R}$ $f(x) = x^3 e^x (x+1) = e^x(x^4 + x^3)$.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n+1}{2n^2+n} x^{2n+1}$

Řešení: Platí, že $a_k = 0$ pro sudá k, pro lichá $k = 2n+1$ je $a_k = (-1)^n \frac{3n+1}{2n^2+n}$. Poloměr konvergence je tedy roven 1. V krajích řada konverguje podle Leibnizova kritéria.

Pro $x \in (-1,1)$ položme $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n+1}{2n^2+n} x^{2n+1}$. Pak

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n+1}{n} x^{2n}.$$

Řadu můžeme roztrhnout na

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 3x^{2n}. + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} x^{2n}.$$

Z geometrické řady je

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 3x^{2n} = \frac{-3x^2}{1+x^2}.$$

Z Taylorova rozvoje logaritmu pak máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} x^{2n} = -\log(1+x^2).$$

Dohromady je

$$f'(x) = \frac{-3x^2}{1+x^2} - \log(1+x^2).$$

Po zintegrování dostaneme

$$f(x) = -x + \arctan x - x \log(1+x^2) + c.$$

Dosadíme 0 a získáme $c = 0$. Pro $x \in (-1, 1)$ tedy platí

$$f(x) = -x + \arctan x - x \log(1 + x^2).$$

Protože řada v krajích konverguje, z Abelovy věty dostaneme

$$f(x) = -x + \arctan x - x \log(1 + x^2), \quad x \in [-1, 1].$$

(d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n-1}{n!} x^n$

Řešení: Poloměr konvergence $R = \infty$. Položme

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n-1}{n!} x^n = -\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n!} x^n$$

Z rozvoje exponenciály máme

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n!} = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = -(e^{-x} + x - 1)$$

a

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n!} x^n = x \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} = x \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-x)^{n-1}}{(n-1)!} = x(e^{-x} - 1)$$

Dohromady pak

$$f(x) = e^{-x} + x - 1 + x e^{-x} - x = (x + 1) e^{-x} - 1$$