8. cvičení – Mocninné řady – sčítání řad

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1. Nechť R je poloměrem konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. Pak poloměr konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n(x-x_0)^{n-1}$ je také roven R.

Pro $x \in \mathbb{R}$, $|x-x_0| < R$ definujme $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. Pak funkce f má vlastní derivace v každém bodě $x \in \mathbb{R}$, $|x-x_0| < R$ a platí

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n(x-x_0)^{n-1}.$$

Věta 2. Mějme mocninnou řadu $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ s poloměrem konvergence $R > 0$.

Pak

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$$

je také mocninná řada se stejným středem a poloměrem konvergence. Navíc platí

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1} + C \qquad \text{na } (x_0-R, x_0+R).$$

Věta 3 (Abel)**.** Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ je mocninná řada s poloměrem konvergence $R > 0$. Nechť navíc $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ konverguje. Pak mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ konverguje stejnoměrně na $[x_0, x_0+R]$ a

$$\lim_{r \to R-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

(Věta platí i pro variantu $[x_0-R, x_0]$.)

Věta 4 (Mertens)**.** Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konverguje a řada $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ konverguje. Pak jejich Cauchyův součin je konvergentní řada a platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} a_{k+1-i} b_i \right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m \right)$$

Algoritmus

1. Najdeme poloměr konvergence.
2. Odhadneme, na jakou řadu budeme převádět (najdeme podobného Taylora, kterého umíme sečíst).
3. Rozhodneme, zda budeme spíš
   (a) integrovat - členy nx^n
   (b) derivovat - členy x^n/n
4. Pokud je to nutné, řadu upravíme - např. $\sum \frac{x^n}{n-1} = x \sum \frac{x^{n-1}}{n-1}$.
5. Zderivujeme/zintegrujeme a sečteme.
6. Zintegrujeme/zderivujeme zpátky. U integrálů nezapomeneme na konstanty.
7. Zkontrolujeme krajní body - jestliže tam původní řada konverguje, aplikujeme Abelovu větu.

Algoritmus 2

1. Lze převést na geometrickou řadu? Nebo na jiného Taylora?
2. Když funkci zderivujeme/zintegrujeme, nelze ji převést na Taylora?
3. Po rozvinutí najdeme poloměr konvergence.
4. Příp. zintegrujeme/zderivujeme zpátky. U integrálů nezapomeneme na konstanty.
5. Zkontrolujeme krajní body - jestliže tam řada konverguje a funkce je definovaná, aplikujeme Abelovu větu.

Příklady

1. Derivováním člen po členu sečtěte následující řady:

   (a) $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$ (b) $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots$

2. Integrováním člen po členu sečtěte následující řady:

   (a) ♣ $x + 2x^2 + 3x^3 + \dots$ (b) ♡ $1 \cdot 2x + 2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 4x^3 + \dots$

3. Derivováním nebo integrováním člen po členu sečtěte následující řady:

   (a) $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$
   (b) ❀ $x - 4x^2 + 9x^3 - 16x^4 + \dots$
   (c) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$

4. Rozviňte do mocninné řady (o středu 0) funkce:

   (a) $\frac{1}{1+x^3}$ (b) $\frac{x^2+1}{x^2-1}$ (c) $\arctan x$ (d) $(1+x)\ln(1+x)$ (e) $\frac{1}{3-2x}$ (f) ♡ $\frac{1}{(1-x)^2}$ (g) ❄ $\sin^2 x$ (h) ❅ $\frac{1}{(1+x^2)^2}$

Zkouškové příklady

5. Sečtěte řadu

   (a) ♡ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n(n+1)}$
   (b) ❀ $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \frac{x^{n+2}}{n!}$
   (c) ✻ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n+1}{2n^2+n} x^{2n+1}$
   (d) ✾ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n-1}{n!} x^n$

(2a) $= x \sum n x^{n-1}$
(2b) $x \sum n(n+1)x^{n-1}$
(3b) Trik $x \sum n x^{n-1}$
(4f) $F(x) = 1/(1-x)$
(4g) $\sin^2 x = (1-\cos 2x)/2$
(4h) rozvniňte $1/(1+x^2)$, pak Cauchy. součin
(5a) $x^{n+2} = x x^{n+1}$
(5b) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
(5c) zderivovat, pak roztrhnout
(5d) roztrhnout, pak exp