$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{x+n}$$

(a) D_f: $x > -1$

pak $\sum \sin n$ má om. č. součty

fix x: $0 \le \frac{1}{x+n} \to 0$, $\frac{1}{x+n}$ je klesající $\Big\}$ Dirichlet k

Závěr: $\underline{x \in (-1, \infty)}$

(b) $\sum f_n \rightrightarrows$?

Dirichlet $a_n = \sin n$ om. č. s.

$b_n = \frac{1}{x+n}$ fix x, pak $\frac{1}{x+n}$ je monot. klesající, ≥ 0

$b_n \rightrightarrows 0$? $\quad \tau_n = \sup_{x>-1} \left| \frac{1}{x+n} \right| = \frac{1}{-1+n} \to 0$

pro $n \ge 2$ máme

tedy $\underline{\sum f_n \rightrightarrows 0}$ z Dir. na $(-1, \infty)$

(c) $f_n'(x) = \frac{-\sin n}{(x+n)^2}$ na $x > -1$

$\sum f_n(0) = 0$ k

$\cdot \sum \underbrace{\frac{-\sin n}{(x+n)^2}}_{g_n} \rightrightarrows 0$?

fix n: $n \ge 2$ $\quad \tau_n = \sup_{x \in (-1,\infty)} \left| \frac{\sin n}{(x+n)^2} \right| \le \frac{1}{(x+n)^2} \le \frac{1}{(-1+n)^2}$

$\sum \frac{1}{(n-1)^2}$ k $\quad \left(\sum \frac{1}{n^2} \text{ k}\right)$

pak z věty o $\sum$ a der. je

$$\underline{f'(x) = \sum \frac{-\sin n}{(x+n)^2}} \quad \text{na } (-1, \infty)$$

$$\sum (-1)^n \frac{n^3 x}{1+n^4x^2}$$

- $\underbrace{\sum \frac{(-1)^n}{n}}_{\sum \text{ Leibniz}} \cdot \underbrace{\frac{n^4 x}{1+n^4x^2}}$

fix x, $x>0$ $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^4x}{1+n^4x^2} = 1 \cdot \frac{1}{x}$

b_n roste: $\quad b_n < b_{n+1}$

$$\frac{n^4x}{1+n^4x^2} \le \frac{(n+1)^4 x}{1+(n+1)^4x^2}$$

$$x\, n^4 \cancel{(n+1)^4 x^2} + n^4 x \le (n+1)^4 x + \cancel{(n+1)^4 x}\, n^4 x^2 \quad \checkmark$$

pro $x=0$ $\quad \sum 0$ $\quad k$

pro $x<0$ $\quad -\sum (-1)^n \frac{n^3|x|}{1+n^4|x|^2}$ $\quad k$

Závěr: $\quad x \in \mathbb{R}$

- $x \in [1,2]$

Uvažujme $\quad \sum \frac{(-1)^n}{n} \rightrightarrows \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$b_n = \frac{n^3 x}{1+n^4x^2} \qquad 0 \le b_1 \le \dots \le b_n \le b_{n+1} \le \frac{1}{x} \le 1$

z Abela $k \rightrightarrows$ na $[1,2]$

- na $\mathbb{R}$ nestejn. $\rightrightarrows$

zvolme $(-\delta, \delta)$ a ověřme NP

$$\Gamma_n = \sup_{x\in(-\delta,\delta)} \left|\frac{n^3x}{1+n^4x^2}\right| \underset{x = 1/n^2}{\le} \frac{n^3 \cdot \frac{1}{n^2}}{1+n^4 \cdot \frac{1}{n^4}} = \frac{n}{2} \not\to 0$$

Závěr: $\quad \sum \not\rightrightarrows$ na $\mathbb{R}$

$$f_n(x) = \cos\left(\frac{3n\pi}{2}\right) \arctan\left(\sin\left(\frac{1}{nx}\right)\right)$$

(a) $f_n \rightrightarrows 0$?

- $(0, \delta)$

$$T_n = \sup_{x\in(0,\delta)} |f_n(x)| \geq \left|f_n\left(\tfrac{1}{n}\right)\right| = \left|\cos\frac{3n\pi}{2}\right| \cdot \arctan\left(\sin\left(\frac{1}{n\cdot\frac{1}{n}}\right)\right)$$

$x = 1/n$

$$= \left|\cos\frac{3n\pi}{2}\right| \cdot \arctan(\sin 1) \not\to 0$$

$\downarrow$

$0, -1, 0, 1 \ldots$

$\boxed{\text{Ne}}$ $f_n \not\rightrightarrows 0$ na $(0, \delta)$

- (δ, ∞)

$$T_n = \sup_{x\in(\delta,\infty)} \left|\cos\frac{3n\pi}{2}\right| \left|\arctan\left(\sin\frac{1}{nx}\right)\right| \leq 1 \cdot \left|\sin\frac{1}{nx}\right| \leq 1 \cdot \left|\frac{1}{nx}\right| \leq \frac{1}{n\cdot\delta}$$

$|\arctan t| \leq |t|$

$|\sin t| \leq |t|$

$\lim \frac{1}{n\delta} = 0$ $\underline{\text{Ano}}$ $f_n \rightrightarrows 0$ na (δ, ∞)

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \rightrightarrows$?

- $(0, \delta)$ Nesplňuje NP, $f_n \not\rightrightarrows 0$

- (δ, ∞)

Dirichlet $\sum a_n = \sum \cos\frac{3n\pi}{2}$ má om. č. součty (víme z 1. semestru)

$b_n = \arctan\left(\sin\left(\frac{1}{nx}\right)\right) \rightrightarrows 0$ (jako v (a))

Monotonie: volme n_0: $\frac{1}{n_0\delta} < \pi/2$, pak $0 < \frac{1}{nx} < \frac{\pi}{2}$ pro $n \geq n_0$

Pak pro pevné x: a $n \geq n_0$ $0 < \frac{1}{nx} < \pi/2$, $\frac{1}{nx} \to 0$ a je monotónní (klesá)

$\sin t$ je monot. na $(0, \pi/2)$, $\sin\left(\frac{1}{nx}\right)$ klesá

$\arctan t$ je monot. na $\mathbb{R}$, $\arctan\left(\sin\frac{1}{nx}\right)$ klesá

Navíc $b_n(x) \geq 0$

Závěr: $\sum f_n(x) \rightrightarrows$ na (δ, ∞) z Dirichleta

(c) $\sum |f_n(x)|$

fixujme $x \in (0, \infty)$.

Pak $\sum\limits_n \left|\cos^3 \frac{n\pi}{2}\right| \cdot \left|\operatorname{arctan} \sin \frac{1}{nx}\right| = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \left|\operatorname{arctan} \sin \frac{1}{2mx}\right|$

$\downarrow$ 0 liché, 1 sudé

$\downarrow$ $\approx \frac{1}{nx}$

dohromady LSK s $\frac{1}{2mx}$, ale $\sum \frac{1}{2mx}$ D,

tedy naše řada (čísel) také diverguje

$$f(x) = \sum \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{n+x^2}}_{f_n(x)}$$

(a) fix x: $x \neq 0$ LSK s $b_n = \left|\frac{x/n}{n+x^2}\right| = \frac{|x|}{n^2+nx^2}$

$x=0$ $\sum 0$

(c) . $f_n'(x) = \frac{\cos\left(\frac{x}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}(n+x^2) - \sin\left(\frac{x}{n}\right)\cdot 2x}{(n+x^2)^2}$ $x \in \mathbb{R}$

← dobre def

. $f_n(0) = 0$ $\sum 0$ k

. nechť $x \in [-k, k)$

fix n: $\Gamma_n = \sup_{x\in[-k,k]} \left|\frac{\cos\left(\frac{x}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{x^2}{n}\right) - \sin\left(\frac{x}{n}\right)\cdot 2x}{(n+x^2)^2}\right| \leq \frac{1\cdot\left(1+\frac{k^2}{n}\right)+1\cdot|2k|}{n^2}$

$\leq \frac{k^2+2k+1}{n^2}$ $\sum \frac{(k+1)^2}{n^2}$ k

$\rightarrow \sum f_n'(x) \rightrightarrows$ na $(-k,k)$, tedy $\sum \overset{loc}{\rightrightarrows}$ na $\mathbb{R}$

(b) z (c) plyne $\sum f_n \overset{loc}{\rightrightarrows}$ na $\mathbb{R}$

(d) $f' = \sum f_n'$.

$$f(x) = \sum \underbrace{(-1)^n \arcsin(x^n) \frac{x}{1+n^2x^2}}_{f_n(x)} \qquad x \in [-1,1]$$

• fix $x \in [-1,1]$

$x \neq 0$ $\quad |f_n(x)| \leq 1 \cdot |\arcsin(x^n)| \cdot \frac{x}{1+n^2x^2} \leq \frac{\pi/2 \cdot x}{1+n^2x^2}$

$\downarrow$

LSK s $\frac{1}{n^2}$ $\quad$ K

$x = 0$ $\quad \sum 0$ K

• $x < 0$: $\quad (-1)^n \arcsin((-1)^n |x|^n) \cdot \frac{-|x|}{1+n^2x^2} = -\arcsin |x|^n \cdot \frac{+|x|}{1+n^2x^2}$

$\downarrow$

lichý

• $\sum \rightrightarrows$?

fix n:

$$r_n = \sup_{x \in [-1,1]} \left| (-1)^n \arcsin(x^n) \frac{x}{1+n^2x^2} \right|$$

• $x \in [-1/2, 1/2]$: $\quad |f_n(x)| \leq 1 \cdot \arcsin\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{1/2}{1+0}$

$x \in [1/2, 1]$: $\quad |f_n(x)| \leq 1 \cdot \pi/2 \cdot \frac{1}{1+n^2 \cdot 1/4}$

$[-1, 1/2]$: $\longrightarrow$

$$r_n \leq \max \left\{ \frac{1}{2} \arcsin (1/2)^n, \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1+n^2/4} \right\} \leq \frac{1}{2} \arcsin (1/2)^n + \frac{\pi/2}{1+n^2/4}$$

$$\sum \frac{1}{2} \arcsin(1/2)^n + \frac{\pi/2}{1+n^2/4} \qquad K$$

$\downarrow$ $\quad$ $\downarrow$

LSK $(1/2)^n$ $\quad$ LSK $\frac{1}{n^2}$

Závěr: $\quad \sum \rightrightarrows$ na $[-1,1]$

• $f(x)$ spoj na $[-1,1]$

Bonus

6. Nechť $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Které implikace mezi následujícími tvrzeními platí?

   (a) Funkce f je spojitá a $|f(x)| < 1$ pro každé $x \in [0,1]$.

   (b) Funkce f je spojitá skoro všude a $|f(x)| < 1$ pro každé $x \in [0,1]$.

   (c) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} (f(x))^n$ je stejnoměrně konvergentní na $[0,1]$.

   Řešení:

   - (a$\to$b) Zřejmě.
   - (b$\not\to$a) Protipříklad: $f(x) = x$ na $[0,1)$, $f(1) = \frac{1}{2}$.
   - (b$\not\to$c) Protipříklad: $f(x) = x$ na $[0,1)$, $f(1) = 0$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$ na $[0,1)$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(1) = 0$. Řada ale nekonverguje stejnoměrně, protože nesplňuje nutnou podmínku. Totiž $x^n \not\rightrightarrows 0$ na $(0,1)$.
   - (c$\not\to$a) Protipříklad: $f(x) = 0$ na $[0,1/2)$, $f(x) = \frac{1}{2}$ na $[1/2,1]$. Pak $\sup |f^n(x)| = \frac{1}{2^n}$, což je konvergentní řada, tedy z Weierstrassova kritéria řada konverguje. Ale f není spojitá.
   - (c$\not\to$b) Protipříklad: $f(x) = 0$ na $[0,1] \cap \mathbb{Q}$, $f(x) = \frac{1}{2}$ na $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$. Pak $\sup |f^n(x)| = \frac{1}{2^n}$, což je konvergentní řada, tedy z Weierstrassova kritéria řada konverguje. Ale f není spojitá v žádném bodě $[0,1]$.
   - (a$\to$c) Protože f je spojitá, je spojitá i $|f|$. Spojitá $|f|$ nabývá maxima, tedy $\exists x_0$: $|f(x)| \leq |f(x_0)| < 1$. Tedy $\sigma_n = |f^n(x)| = |f^n(x_0)|$. Ale $\sum_{n=1}^{\infty} |f^n(x_0)|$ konverguje. Tedy (c) platí.

7. Pravda nebo nepravda?

   (a) Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na intervalu $[a,b]$ a $(b,c]$. Pak $f_n \rightrightarrows f$ na $[a,c]$.
   Řešení: Pravda. Zvolme $\varepsilon > 0$. Pak $\exists n_1$ tak, že $\forall x \in [a,b]$ $\forall n \geq n_1$ je
   $$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$
   Stejně tak $\exists n_2$ tak, že $\forall x \in (b,c]$ $\forall n \geq n_2$
   $$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$
   Zvolme tedy $\varepsilon > 0$ a položme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Pak pro $\forall x \in [a,c]$ je
   $$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

   (b) Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na množinách $A_1, A_2, \ldots, A_M$. Pak $f_n \rightrightarrows f$ na $\bigcup_{i=1}^{M} A_i$.
   Řešení: Pravda, analogicky (a).

   (c) Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na množinách $A_1, A_2, \ldots$. Pak $f_n \rightrightarrows f$ na $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.
   Řešení: Nepravda. Protipříklad: $f_n = x^n$, $A_i = [0, 1 - 1/i]$.

   (d) Nechť K je kompakt. Pak $f_n \rightrightarrows$ na K právě tehdy, když $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows}$ na K.

Řešení: Zjevně platí "$\Rightarrow$".

Pro "$\Leftarrow$" předpokládejme, že $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows}$. Tedy pro každé $x \in K$ existuje otevřené okolí B_x tak, že $f_n \rightrightarrows$ na $K \cap B_x$. Systém B_x tvoří otevřené pokrytí K, tedy lze vybrat konečné podpokrytí. Tvrzení pak plyne z (b).