6. cvičení - Řady funkcí - Souhrn

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (Záměna sumy a derivace)**.** Nechť (a, b) je neprázdný interval a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je řada reálných funkcí splňující:

1. f_n má vlastní **derivaci** na (a, b),
2. existuje $x_0 \in (a, b)$ takové, že $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ **konverguje**,
3. řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n' \overset{loc}{\rightrightarrows}$ na (a, b).

Pak funkce $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je dobře definovaná a **diferencovatelná**, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} F(x)$ na (a, b) a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n' \overset{loc}{\rightrightarrows} F'(x)$ na (a, b).

Příklady

(Některé máme od: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~prazak/vyuka/)

1. Uvažujte funkci
$$f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{x + n}.$$
   (a) ♡ Určete definiční obor f.
   (b) Určete, zda konvergence dané řady je na definičním oboru f stejnoměrná.
   (c) Určete derivaci f ve všech bodech, kde existuje.

2. Uvažujte funkci
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3 x}{1 + n^4 x^2}.$$
   (a) ♡ Určete definiční obor f.
   (b) Určete, zda konvergence dané řady je stejnoměrná na $[1, 2]$.
   (c) ♡ Určete, zda konvergence dané řady je stejnoměrná na $\mathbb{R}$.

3. Uvažujte posloupnost funkcí
$$f_n(x) = \cos\left(\frac{3n\pi}{2}\right) \arctan\left(\sin \frac{1}{nx}\right).$$
   (a) ♡ Rozhodněte, zda $f_n \rightrightarrows 0$ na $(0, \delta)$ a na (δ, ∞).
   (b) Rozhodněte, zda $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na $(0, \delta)$ a na (δ, ∞).
   (c) ♡ Rozhodněte, zda $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \rightrightarrows$ na $(0, \delta)$ a na (δ, ∞).

4. Uvažujte funkci $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, kde

$$f_n(x) = \frac{\sin \frac{x}{n}}{n + x^2}.$$

(a) Ukažte, že f je dobře definována na $\mathbb{R}$.

(b) ♡ Rozhodněte, zda řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje lokálně stejnoměrně na $\mathbb{R}$.

(c) Rozhodněte, zda řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ konverguje lokálně stejnoměrně na $\mathbb{R}$.

(d) Spočtěte derivaci funkce f na $\mathbb{R}$ (vyjádřete jako řadu).

5. Uvažujte funkci

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arcsin(x^n) \frac{x}{1 + n^2 x^2}.$$

(a) Ukažte, že f je definována pro každé $x \in [-1, 1]$.

(b) ♡ Rozhodněte, zda konvergence dané řady je na $x \in [-1, 1]$ stejnoměrná.

(c) Rozhodněte, zda f je na $x \in [-1, 1]$ spojitá.

Bonus

(Některé máme od: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~cuth/MA4_cviceni.pdf)

6. Nechť $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Které implikace mezi následujícími tvrzeními platí?

(a) Funkce f je spojitá a $|f(x)| < 1$ pro každé $x \in [0, 1]$.

(b) Funkce f je spojitá skoro všude a $|f(x)| < 1$ pro každé $x \in [0, 1]$.

(c) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} (f(x))^n$ je stejnoměrně konvergentní na $[0, 1]$.

7. Pravda nebo nepravda?

(a) Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na intervalu $[a, b]$ a $(b, c]$. Pak $f_n \rightrightarrows f$ na $[a, c]$.

(b) Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na množinách $A_1, A_2, \ldots, A_M$. Pak $f_n \rightrightarrows f$ na $\bigcup_{i=1}^{M} A_i$.

(c) Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na množinách $A_1, A_2, \ldots$. Pak $f_n \rightrightarrows f$ na $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

(d) ♡ Nechť K je kompakt. Pak $f_n \rightrightarrows$ na K právě tehdy, když $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows}$ na K.

(1a) x musí být v def. oboru pro $\forall f_n$.
(1b) $\frac{(-1)^n}{n} \cdot \frac{n^4 x}{1+n^4x^2}$
(2c) NP
(3a) na $(0, \delta)$ testujte $f_n(1/n)$
(3c) konverguje vůbec řada čísel?
(4b) plyne z (4c)
(5b) uvažujte zvlášť intervaly $[-1, -1/2]$, $[-1/2, 1/2]$ a $[1/2, 1]$
(7d) Kpt = z $\forall$ otevřeného pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí.