4. cvičení - Řady funkcí

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Definice 1. Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je interval a $f_n : M \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, jsou funkce. Řekneme, že řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je *bodově konvergentní* na M, jestliže posloupnost funkcí $\{\sum_{k=1}^{m} f_k\}_{m=1}^{\infty}$ je bodově konvergentní na M.

Pojmy *stejnoměrné* a *lokálně stejnoměrné* konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ se definují analogicky.

Věta 2 (Weierstrassovo kritérium)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je řada reálných funkcí definovaných na neprázdné množině M. Označme

$$\sigma_n := \sup_{x \in M} |f_n(x)|.$$

Jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n < \infty$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na M.

Poznámka 3 (Nutná podmínka konvergence)**.** Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na M, potom $f_n \rightrightarrows 0$ na M.

Věta 4 (Bolzano-Cauchyova podmínka)**.** Řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na M právě tehdy, když

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0\, \forall m, n,\ m \geq n \geq n_0\, \forall x \in M : \left| \sum_{j=n}^{m} f_j(x) \right| < \varepsilon.$$

Poznámka 5 (Řada a spojitost)**.** Nechť f_n jsou spojité funkce na (a, b). Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \overset{loc}{\rightrightarrows}$ na (a, b), potom její součet je spojitá funkce na (a, b).

Algoritmus

1. Určíme bodovou konvergenci: **zafixujeme** x a vyšetříme $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. (Kritéria k obyčejným řadám - LSK, SK, Cauchy, d'Alambert, Leibniz, Abel-Dirichlet. Dáváme pozor na parametr.) Tím získáme i definiční obor.
2. Zkusíme Weierstrassovu větu:
   (a) **Zafixujeme** n a hledáme $\sigma_n := \sup |f_n(x)|$.
   Je to stejné jako u posloupností: Lze použít nějaké odhady nebo vyšetřit extrémy dané funkce (třeba pomocí první derivace). Supremum se pak může realizovat v bodech **maxima** i **minima** $f_n - f$ nebo v **krajních bodech** vč. $\pm\infty$.
   (b) Pak vyšetříme $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n$. Jestliže konverguje, máme stejnoměrnou konvergenci. Jestliže **nekonverguje, nevíme nic**.
   (c) Můžeme zkusit i nějaký menší interval, jestli nemáme stejnoměrnou konvergenci alespoň na něm.
3. Stejnoměrnou konvergenci lze vyvrátit:
   (a) Nutnou podmínkou.
   (b) B-C podmínkou.
   (c) Známe-li součet, můžeme použít fakt, že součet spojitých při stejnoměrné konvergenci musí být také spojitá.

Příklady

1. Vyšetřete konvergenci řad - zjistěte, pro jaká x řady konvergují (jako řady čísel); na jakém intervalu řady konvergují stejnoměrně a lok. stejnoměrně; na jakém intervalu je součet řady spojitá funkce?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-7}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n e^{-nx}$, $x \in [0, \infty)$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{x}}{n^4 + x^2}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1 + n^5 x^2}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1 + n^2 x^2}$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + n^2 x^2}$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{2x}{x^2 + n^3}\right)$

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}$

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^{\alpha}}$, $\alpha > 1$

(l)♡ $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n}\right)$

2. Vyšetřete konvergenci řad (může dojít na BC podmínku).

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1 + n^2 x^2}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{n^4 + x^2}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{2x}{x^2 + n^2}\right)$, $x \in [0, \infty)$

Bonus

3. Ukažte, že konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ stejnoměrně na (a, b), konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ stejnoměrně na (a, b).

4. (a) Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na $(0, 1)$. Může být f neomezená?
   (b) Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na $(0, 1)$. Nechť f_n jsou omezené. Může být f neomezená?
   (c) Nechť $g_n \to g$, g_n jsou omezené funkce. Může být g neomezená?

Poznámka 6 (Negace B-C podmínky)**.**

$$\exists \varepsilon > 0 \, \forall n_0 \, \exists m, n, \, m \geq n \geq n_0 \, \exists x \in M : \left| \sum_{j=n}^{m} f_j(x) \right| \geq \varepsilon.$$

(l) $\ln(1 + t) \leq t$, $t \in (-1, \infty)$