3. cvičení - Posloupnosti funkcí 3

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (Charakterizace stejnoměrné konvergence)**.** Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je interval a $f, f_n : M \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, jsou funkce. Pak

$$f_n \rightrightarrows f$$

právě tehdy, když

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in M\} = 0.$$

Věta 2 (Charakterizace lokálně stejnoměrné konvergence na intervalu.)**.** Nechť $(a, b) \subset \mathbb{R}$ je interval (i neomezený) a $f_n : (a, b) \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, jsou funkce. Pak $\{f_n\}$ konverguje lokálně stejnoměrně na (a, b) právě tehdy, když $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně na každém intervalu $[c, d] \subset (a, b)$.

Příklady

1. Najděte **bodovou** limitu, vyšetřete **stejnoměrnou** a **lokálně** stejnoměrnou konvergenci, případně najděte **intervaly**, kde posloupnost konverguje stejnoměrně.

   (a) $f_n(x) = x^n e^{-x^2/n}$ na $(-1, 1)$

   (b) $f_n(x) = \dfrac{n^2 - x^2}{n^2 + x^2}$

   (c) $f_n(x) = n \sin \dfrac{x}{n}$

   (d) $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$

   (e) ♡ $f_n(x) = x \arctan(nx)$

   Bonus

   Věta 3. Nechť (a, b) je **omezený** interval, $f_n : (a, b) \to \mathbb{R}$. Nechť

   (a) f_n mají vlastní derivaci na (a, b),

   (b) existuje $x_0 \in (a, b)$ takové, že $\{f_n(x_0)\}$ konverguje,

   (c) $\{f_n'\}$ konverguje stejnoměrně na (a, b).

   Pak existuje funkce f taková, že $f_n \rightrightarrows f$ na (a, b), f má vlastní derivaci na (a, b) a platí $f_n' \rightrightarrows f'$ na (a, b).

2. Nechť $f_n = \frac{1}{n} \arctan(x^n)$. Ukažte, že f_n konverguje stejnoměrně k jisté f, ale není pravda, že $f_n' \rightrightarrows f'$.
3. Nechť $f_n = \sin \frac{x}{n^2}$. Najděte bodovou limitu, ověřte (lokálně) stejnoměrnou konvergenci. Najděte derivace a ověřte předpoklady Věty o derivacích. Ukažte, že závěry věty platí.

Věta 4. Nechť (a,b) je **omezený** interval, $f_n \rightrightarrows f$ na $[a,b]$ a $f_n \in \mathcal{C}([a,b])$. Pak

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

4. Nechť f_n je definována takto: $f_n(0) = \frac{1}{n}$, mimo interval $[-n,n]$ je konstantně nulová a na intervalu $[-n,n]$ je dodefinována lineárně. Načrtněte první 3 funkce (vyjdou takové špičaté kopečky). Ověřte, zda $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n = \int_{-\infty}^{\infty} \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ nebo ne. Pak ověřte předpoklady věty nebo najděte předpoklad, který není splněný.
5. (https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~cuth/MA4_cviceni.pdf)
   Nechť $f, f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$
   Rozhodněte o pravdivosti následujících tvrzení:
   (a) $f_n \rightrightarrows f$ na $[0,1]$ právě tehdy, když existuje množina $E \subset [0,1]$, E je míry 0 a $f_n \rightrightarrows f$ na $[0,1] \setminus E$.
   (b) Nechť f_n, f jsou spojité. Pak $f_n \rightrightarrows f$ na $[0,1]$ právě tehdy, když $\int_0^1 |f_n(t) - f(t)|\,\mathrm{d}t \to 0$.
   (c) Nechť f_n, f jsou spojité. Pak $f_n \rightrightarrows f$ na $[0,1]$ právě tehdy, když existuje množina $E \subset [0,1]$, E je míry 0 a $f_n \rightrightarrows f$ na $[0,1] \setminus E$.

(1e) $t > 0$: $\frac{\pi}{2} - \arctan t = \arctan \frac{1}{t}$; $t > 0$: $0 < \frac{\arctan t}{t} < 1$