2. cvičení - Posloupnosti funkcí 2

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Definice 1. Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_n = 1^\infty$ *konverguje lokálně stejnoměrně* k funkci f na M, jestliže pro každé $x \in M$ existuje $r > 0$ takové, že $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně k f na $(x - r, x + r)$. Značíme $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$.

Poznámka 2. Jestliže $f_n \rightrightarrows f$, pak $f_n \to f$ na M.

Věta 3 (Charakterizace stejnoměrné konvergence)**.** Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je interval a $f, f_n : M \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, jsou funkce. Pak

$$f_n \rightrightarrows f$$

právě tehdy, když

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in M\} = 0.$$

Věta 4 (Stejnoměrná konvergence a spojitost.)**.** Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je interval a $f, f_n : M \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, kde f_n jsou **spojité** funkce. Nechť navíc $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na M. Pak f je také **spojitá** na M.

Věta 5 (Charakterizace lokálně stejnoměrné konvergence na intervalu.)**.** Nechť $(a, b) \subset \mathbb{R}$ je interval (i neomezený) a $f_n : (a, b) \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, jsou funkce. Pak $\{f_n\}$ konverguje lokálně stejnoměrně na (a, b) právě tehdy, když $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně na každém intervalu $[c, d] \subset (a, b)$.

Věta 6. Nechť $(a, b) \subset \mathbb{R}$ je interval a $f, f_n : (a, b) \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, jsou funkce. Nechť navíc

1. $\exists r > 0$: $f_n \rightrightarrows f$ na $B(x_0, r) \setminus \{x_0\}$,
2. $\forall n \in \mathbb{N}\, \exists a_n$: $\lim_{x\to x_0} f_n(x) = a_n$.

Pak existují vlastní limity $\lim_{n\to\infty} a_n$ a $\lim_{x\to x_0} f(x)$ a jsou si rovny.

Věta 7 (Diniho věta)**.** Nechť $[a, b] \subset \mathbb{R}$ je **omezený** interval a $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, jsou **spojité** funkce. Je-li $\{f_n(x)\}$ pro každé $x \in [a, b]$ **monotónní** a **omezená** a je-li funkce $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ **spojitá** na $[a, b]$, pak $f_n \rightrightarrows f$.

Algoritmus

1. Určíme **bodovou** limitu. Určíme i **interval** I, kde posloupnost konverguje.
2. Vyšetříme, zda posloupnost **stejnoměrně konverguje** na celém I.
   (a) Zkusíme test na stejnoměrnou konvergenci (na celém I).
   (b) Dini.
   (c) Zkusíme konvergenci vyvrátit.
      i. Moore-Osgood.
      ii. Nespojitá f.

3. Pakliže funkce **nekonverguje** na celém I:
   (a) Identifikujeme **problematické body**. Zafixujeme interval $[a, b]$ (nebo (a, b)), jehož uzávěr dané body obsahuje, a zkusíme **vyvrátit** konvergenci.
   (b) Zafixujeme interval $[a, b]$, který **neobsahuje** probl. body a **vyšetříme konvergenci**.
4. Napíšeme **závěr**.

Příklady

Zdroje příkladů:

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~bouchala/Vyuka/MFF-NMMA201-1819/Cv08%20-%20Stejnom%c4%9brn%c3%a1%20konvergence%20II%20-%20posloupnosti%20funkc%c3%ad%202.pdf

1. Najděte **bodovou** limitu, vyšetřete **stejnoměrnou** a **lokálně** stejnoměrnou konvergenci, případně najděte **intervaly**, kde posloupnost konverguje stejnoměrně.

   (a) $f_n(x) = e^{n(x-1)}$ na $(0, 1)$
   (b) $f_n(x) = \sin(\pi x^n)$ na $[0, 1]$
   (c) ♡ $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n + x}$ na $(0, \infty)$
   (d) ♡ $f_n(x) = \dfrac{\ln(nx)}{n}$
   (e) $f_n(x) = \dfrac{x}{n} \ln \dfrac{x}{n}$
   (f) $f_n(x) = x^{\frac{n+1}{2n-1}}$
   (g) ♡ $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}}$
   (h) ♡ $f_n(x) = n\left(\sqrt{x + \dfrac{1}{n}} - \sqrt{x}\right)$
   (i) $f_n(x) = \sqrt{x} n^{-\sqrt{x}} \ln n$
   (j) ♡ $f_n(x) = \sqrt[n]{x^n + 3^n}$ na $[0, \infty)$

2. ♡ Ukažte, že vynechání byť jediného předpokladu Diniho věty způsobí její neplatnost:

   (a) kompaktnost intervalu $[a, b]$,
   (b) spojitost f_n,
   (c) spojitost f,
   (d) monotonie $f_n(x)$.

   Tedy najděte $f_n \to f$ takové, že splňují vždy všechny podmínky až na jednu, ale přitom $f_n \not\rightrightarrows f$.

(1c) na $[a, b]$ je $\frac{x^2+x}{1+n+x} \le \frac{b^2+b}{1+n}$
(1d) ln může být i záporný;)
(1g) $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$
(1h) $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$
(1j) 2 policajti, rozdělte na intervaly $[0, 3]$, $[3, \infty)$
(2a) x^n na $[0, 1)$
(2b) $\xi_{(0, \frac{1}{n})}$ na $[0, 1]$
(2c) x^n na $[0, 1]$
(2d) kopeček o výšce 1 na $[0, \frac{1}{n}]$, jinak 0 na $[0, 1]$