



27. cvičení - teorie

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Integrály uvažujeme Newtonovy.

1. Necht' $F = \int \frac{1}{x^2}$ a $F(1) = 1$. Je pravda, že $F(-1) = 3$?

Řešení: Nepravda - problém s s definičním oborem. Funkce $F = -\frac{1}{x} + c_1$ na $(0, \infty)$ a $F = -\frac{1}{x} + c_2$ na $(-\infty, 0)$. Tedy i když z podmínky máme $c_1 = 2$, pořád nevíme nic o c_2 .

2. Které/á z následující jsou tvrzení pravdivá?

A Jestliže $f'(x) = g'(x)$ (pro všechna x), pak $f(x) = g(x)$ (pro všechna x).

B Jestliže $\int f(x) = \int g(x)$ (pro všechna x), pak $f(x) = g(x)$ (pro všechna x).

Zdroj: http://www.math.cornell.edu/~GoodQuestions/GQbysection_pdfversion.pdf

A neplatí, protože i když se rovnají derivace, tak funkce g a f se mohou lišit o konstantu.

B platí. Označme $F(x) = \int f(x)$ a $G(x) = \int g(x)$. Víme, že $F = G$. Pak ale i $F' = G'$, což je vlastně $f = g$.

3. PRAVDA – NEPRAVDA

Necht' F je primitivní funkce k f na intervalu (a, b) .

NE Jestliže (a, b) je omezený a F je omezená, pak i f je omezená.

Protipříklad: $F = \sqrt{x}$, $f = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ na $(0, 1)$.

NE Jestliže f je omezená a spojitá, pak i F je omezená.

Protipříklad: $f = \frac{1}{x}$, $F = \ln x$ na $(1, \infty)$.

4. PRAVDA Necht' funkce f má na \mathbb{R} primitivní funkci, g je polynom. Pak k funkci fg existuje primitivní funkce na \mathbb{R} .

Řešení: Uvažujme polynom g stupně n .

- $n = 0$, tedy $g = a$, kde a je konstanta. Pak z linearity

$$\int af = aF.$$

- $n = 1$, tedy $g = ax + b$. Pak z per partes (polynom g je spojitá funkce) máme

$$\int fg = FG - \int Fg' = FG - \int Fa.$$

Integrál na pravé straně existuje, protože Fa je spojitá funkce. (F jako primitivní funkce musí být spojitá.)

- Obecné n :

$$\int fg = FG - \int Fg'$$

Integrál na pravé straně existuje, protože Fg' je spojitá funkce.

5. Který z následujících grafů může reprezentovat primitivní funkci k funkci na obrázku vpravo?

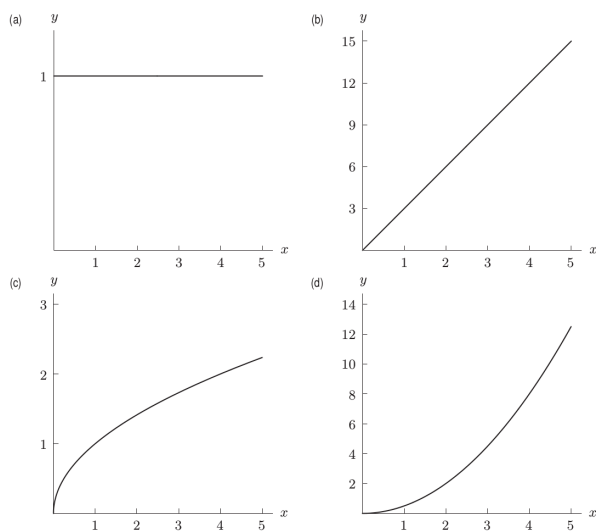
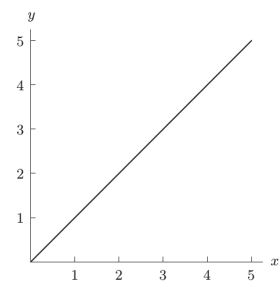


Figure 1: <https://www.wiley.com/college/hugheshallett/0470089148/concepttests/concept.pdf>

D, funkce na obrázku vpravo je $f(x) = x$. Její integrál je $x^2/2$, takže D.

6. Který z následujících grafů může reprezentovat primitivní funkci k funkci na obrázku vpravo?

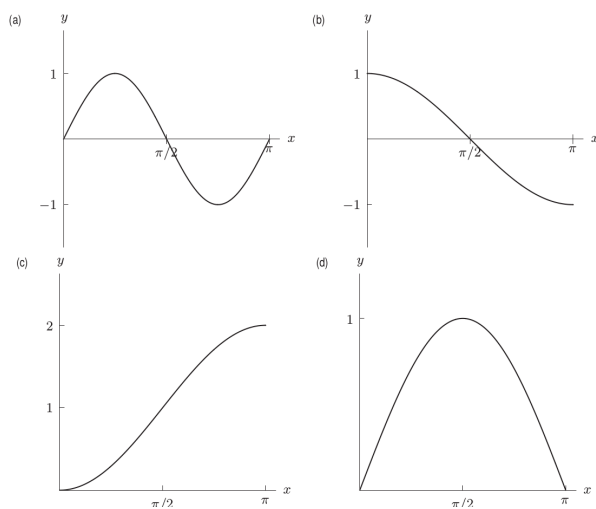
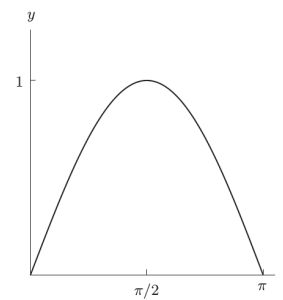
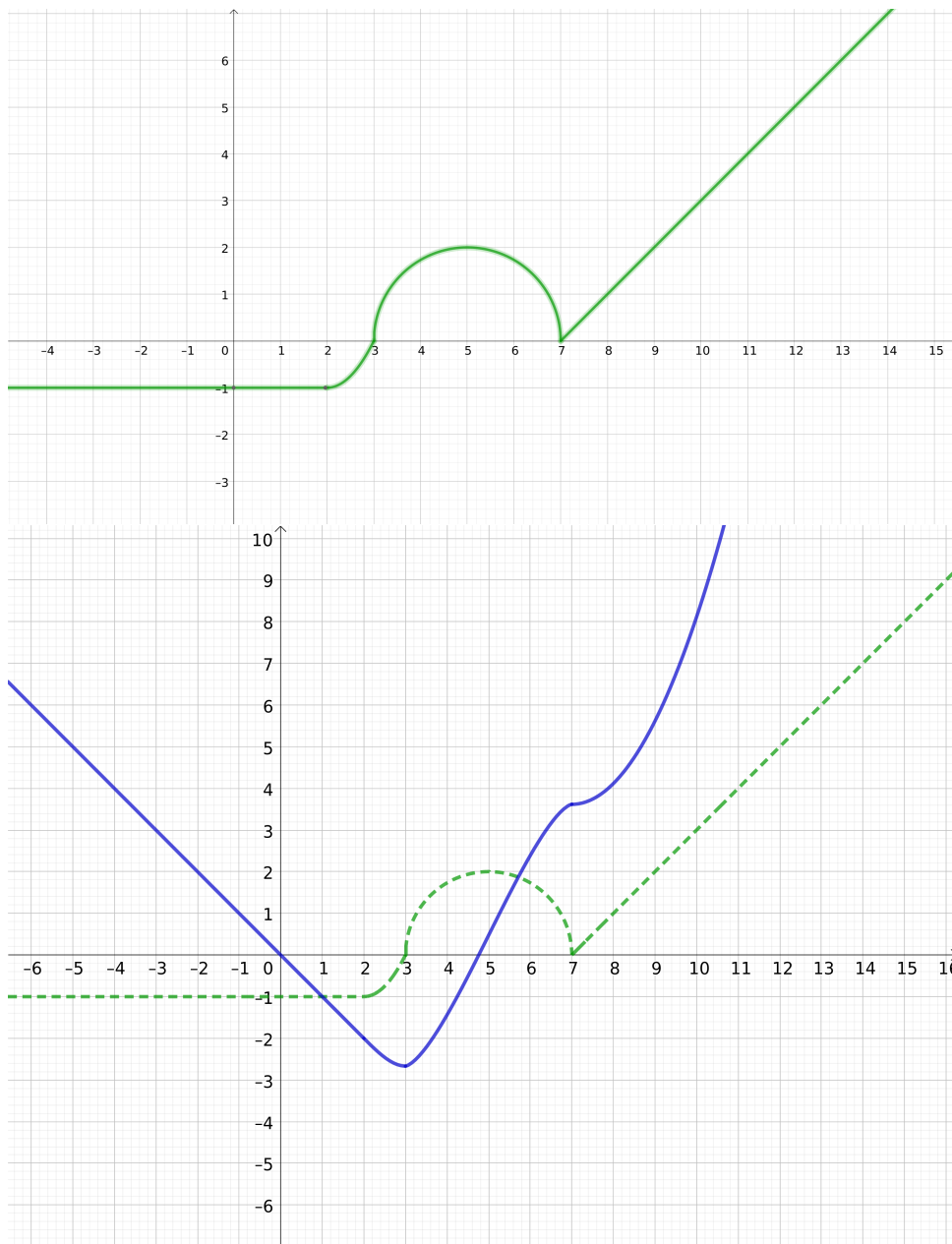


Figure 2: <https://www.wiley.com/college/hugheshallett/0470089148/concepttests/concept.pdf>

C, funkce vpravo (tedy derivace) je kladná, primitivní funkce tedy musí být rostoucí.

7. Na obrázku je funkce f . Načrtněte její primitivní funkci F , jestliže víte, že $F(0) = 0$. (Stačí náčrtek, není nutno hledat primitivní funkci ze vzorečků, jde spíš o grafickou podobu.)



8. Necht' $\int_a^b f_1$ a $\int_a^b f_2$ konvergují a $\int_a^b g_1$ a $\int_a^b g_2$ divergují. Které výroky jsou pravdivé?
- A $\int_a^b f_1 + f_2$ konverguje
 B $\int_a^b f_1 + g_2$ diverguje
 C $\int_a^b g_1 - g_2$ konverguje
 D $\int_a^b f_1 f_2$ konverguje
 E $\int_a^b f_1 g_2$ konverguje

Řešení: A - konverguje, linearita integrálu
 B - diverguje
 C - může konvergovat i divergovat
 D - může konvergovat i divergovat
 E - může konvergovat i divergovat

9. PRAVDA – NEPRAVDA Necht' $(-a, a) \subseteq \mathbb{R}$.

ANO – NE Necht' f je lichá funkce. Pak $\int_{-a}^a f = 0$

ANO – NE Necht' f je sudá funkce. Pak $\int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f$

Řešení: Pravda za předpokladu, že integrály existují vlastní. Jinak integrály nemusí existovat.

10. PRAVDA – NEPRAVDA

NE Jestliže $\int_a^b |f(x)|$ konverguje, pak $\int_a^b f(x)$ konverguje.

NE Jestliže $\int_a^b f(x)$ konverguje, pak $\int_a^b |f(x)|$ konverguje.

Řešení: Obecně neplatí. Protipříklad: f je upravená Dirichletovu funkce s hodnotami -1 a 1 . Pak $|f| = 1$ a $\int_0^1 |f| = 1$, kdežto f nemá vůbec primitivní funkci.

Aby platilo, nutno přidat podmínky (např. f spojitá a $\int_a^b f$ existuje - věta z přednášky).

Druhé tvrzení také obecně neplatí, např. $f = \sin x/x$ na $(1, \infty)$.

11. Necht' f je spojitá funkce definovaná na omezeném intervalu (a, b) . Které implikace mezi následujícími tvrzeními platí?

(Negací k $\int_a^b f$ konverguje je výrok $\int_a^b f = \pm\infty$ nebo $\int_a^b f$ neexistuje.)

(a) $\int_a^b f$ konverguje.

(c) $\int_a^b |f|$ konverguje.

(b) $\int_a^b f^2$ konverguje.

(d) f je definovaná a spojitá dokonce na $[a, b]$.

Řešení:

• (a) $\not\rightarrow$ (b): Protipříklad $f = \frac{1}{\sqrt{x}}$ na $(0, 1)$.

• (a) $\not\rightarrow$ (c): Protipříklad $\int_0^1 \frac{\sin \frac{1}{x}}{x} dx$. Substitucí se převede na $\int_1^\infty \frac{\sin t}{t} dt$, o němž víme, že konverguje, ale ne absolutně.

• (c) \rightarrow (a): Absolutní konvergence implikuje konvergenci (věta).

• (b) \rightarrow (c): Platí, že $|f| \leq \max\{1, f^2\}$. Ale $\int_a^b 1 < \infty$ a $\int_a^b f^2 < \infty$ také (předpoklad). Odtud (a ze srovnávacího kritéria) už $\int_a^b |f|$ konverguje.

Z předchozího pak plyne:

- (b) \rightarrow (a)
- (d) \rightarrow (a): Spojitá funkce na omezeném a uzavřeném intervalu je omezená. Integrál konverguje.
- (d) \rightarrow (c): Je-li f spojitá na $[a, b]$, je tam spojitá i $|f|$. A tedy integrál konverguje.
- (d) \rightarrow (b): Je-li f spojitá na $[a, b]$, je tam spojitá i f^2 . A tedy integrál konverguje.
- (a) \nrightarrow (d): Protipříklad $f = \frac{1}{\sqrt{x}}$ na $(0, 1)$.
- (c) \nrightarrow (d): Protipříklad $f = \frac{1}{\sqrt{x}}$ na $(0, 1)$.
- (b) \nrightarrow (d): Protipříklad $f = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ na $(0, 1)$.

12. PRAVDA – NEPRAVDA

Nechť f je funkce spojitá na $[1, \infty)$.

NE Jestliže $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, pak $\int_1^\infty f(x) dx$ konverguje.

NE Jestliže $\int_1^\infty f(x) dx$ konverguje, pak $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

Řešení: Protipříklad $\int_1^\infty \frac{1}{x}$.

Protipříklad: Uvažujme funkci f , která má v každém $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ zakreslený rovnoramenný trojúhelník o výšce n a základně $2/n^3$.

Pak její integrál je roven $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n^2} < \infty$, ale limita určitě není 0.

13. Najděte horní a dolní riemannovské součty pro Dirichletova funkci

$$D(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Řešení: $\int_a^b D(x) = 0$, $\int_a^{\bar{b}} D(x) = 1$

14. Sestrojte funkce $f_n(x) : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ tak, že

(a) $\int_0^1 f(x) dx = 1$

(b) pro každé $x \in [0, 1]$ je $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$.

Tedy pro tuto posloupnost funkcí platí

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx \neq \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_0^1 0 dx = 0.$$

P.S.: Stačí obrázkem.

např. $f_n(x) = 2n\chi_{[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}]}$

15. Máme diferenciální rovnici

$$y' = \frac{-\sqrt[3]{y+1}}{x}.$$

Rovnici jsme vyřešili a získali následující řešení (k je konstanta a platí $k > 0$):

(a) $y = -1$ na $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$.

(b) $y = -1 - \left(\sqrt{-\frac{2}{3} \ln(k|x|)}\right)^3$ na $(0, 1/k)$ a $(-1/k, 0)$.

(c) $y = -1 + \left(\sqrt{-\frac{2}{3} \ln(k|x|)}\right)^3$ na $(0, 1/k)$ a $(-1/k, 0)$.

Najděte maximální možná řešení. (Neboli slepte v bodech, kde to lze.)

Příklad z <https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf>

Řešení: V 0 slepit nelze, protože tam rovnice nemá smysl.

V bodech $\pm 1/k$ je

$$\lim_{x \rightarrow \pm 1/k \pm} -1 \pm \left(\sqrt{-\frac{2}{3} \ln(k|x|)}\right)^3 = -1$$

a tedy lze nalepit na stacionární řešení. Dohromady

$$y = \begin{cases} -1 \pm \left(\sqrt{-\frac{2}{3} \ln(k|x|)}\right)^3, & x \in (0, 1/k), \\ -1, & x \in [1/k, \infty), \end{cases}$$

nebo

$$y = \begin{cases} -1, & x \in (0, 1/k), \\ -1 \pm \left(\sqrt{-\frac{2}{3} \ln(k|x|)}\right)^3, & x \in [1/k, \infty). \end{cases}$$

16. Máme diferenciální rovnici

$$yy' = \frac{1 - 2x}{y}.$$

Rovnici jsme vyřešili a získali následující řešení (k je konstanta): $y = \sqrt[3]{3(x - x^2 + k)}$ na intervalech

(a) $x \in \mathbb{R}$ pro $k \in (-\infty, -1/4)$

(b) $x \in (-\infty, 1/2)$, $x \in (1/2, \infty)$ pro $k = -1/4$

(c) $x \in (-\infty, 1/2 - \sqrt{k + 1/4})$, $x \in (1/2 - \sqrt{k + 1/4}, 1/2 + \sqrt{k + 1/4})$, $x \in (1/2 + \sqrt{k + 1/4}, \infty)$ pro $k \in (-1/4, \infty)$

Řešení nelze slepit a to ani pro $k = -1/4$. Proč? Proč selže lepicí lemma?

Zdroj: <https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~barta/pcODR/>

Řešení: Řešení by šlo spojitě slepit, ale v bodech lepení by byla nekonečná derivace, což diferenciální rovnice nepovoluje.

Lemma selže - ukažme pro bod $x = 1/2$. Pro limitu máme $\lim_{x \rightarrow 1/2+} y = 0$. Ale $0 \notin D_g$, kde $g = \frac{1}{y^2}$, což je podmínka z algoritmu.

17. Máme diferenciální rovnici

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2}e^x.$$

Máme stacionární řešení $y = 0$ na \mathbb{R} . Na intervalech $y \in (-\infty, 0)$ a $y \in (0, \infty)$ řešíme a dostáváme

$$\sqrt[3]{y} = e^x + k.$$

Dopočítejte řešení a slepte, kde to lze. (Pozor, pro různá k lepení funguje různě.)

Zdroj: <https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~barta/pcODR/> **Řešení:** Pro $c \in [0, \infty)$ je $y = (e^x + c)^3$, $x \in \mathbb{R}$.

Dále máme $y = 0$ na $x \in \mathbb{R}$.

Pro $c, d \in (-\infty, 0)$, $d < c$ lepíme:

$$y = \begin{cases} (e^x + c)^3, & x \in (-\infty, \ln(-c)], \\ 0, & x \in (\ln(-c), \ln(-d)) \\ (e^x + d)^3, & x \in [\ln(-d), \infty), \end{cases}$$

plus případy

$$y = \begin{cases} (e^x + c)^3, & x \in (-\infty, \ln(-c)], \\ 0, & x \in (\ln(-c), \infty). \end{cases}$$

a

$$y = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, \ln(-d)) \\ (e^x + d)^3, & x \in [\ln(-d), \infty). \end{cases}$$