24. cvičení - lineární ODR

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Poznámka 1 (Homogenní rovnice – převod na separované proměnné)**.** Rovnici $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ lze převést na rovnici se sepaprovanými proměnnými substitucí $z(x) = \frac{y(x)}{x}$.

Definice 2. *Lineární diferenciální rovnicí prvního řádu* rozumíme rovnici tvaru

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{1}$$

kde p, q jsou funkce na daném intervalu (a, b).

V dalším budeme předpokládat, že p, q jsou spojité funkce. Pak každé řešení rovnice (1) je třídy $\mathcal{C}^1$.

Homogenní lineární diferenciální rovnicí prvního řádu budeme rozumět rovnici tvaru

$$y' + p(x)y = 0.$$

Věta 3. Maximální řešení rovnice (1) splňující podmínku $y(x_0) = y_0$, kde $x_0 \in (a, b)$, $y_0 \in \mathbb{R}$, má tvar

$$y(x) = \left(\int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\,\mathrm{d}t\right) e^{-P(x)} + y_0 e^{-P(x)}, \qquad x \in (a, b),$$

kde P je primitivní funkce k p na (a, b) splňující $P(x_0) = 0$.

Algoritmus pro lineární ODR

1. Uvažujeme interval (a, b), na kterém dále pracujeme, a upravíme rovnici na lineární.
2. Najdeme řešení y_H homogenní rovnice pomocí separace proměnných, nezapomeneme na konstantu. (Vyjde $e^{P(x)+c}$, kde $P(x) = \int p(x)\,\mathrm{d}x$.)
3. Přepíšeme c na $c(x)$ - odteď je to funkce. Dosadíme do původní rovnice s pravou stranou.
4. Hodně se toho pokrátí, ze zbytku vyjádříme $c'(x)$ a spočteme $c(x)$. Tím najdeme y_P.
5. $y = y_H + y_P$ (Nebo prostě dosadíme za vyšlou konstantu.)
6. Je-li nutno, nalepíme - to se stává jen v případě, že původní rovnici bylo třeba upravit.
7. Případně aplikujeme podmínky.

Hinty

$$\int \tan x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x = \int 1 \cdot \ln x\,\mathrm{d}x$$

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Příklady

1. Najděte řešení diferenciálních rovnic

   (a) $y' + y = e^x$
   (b) ❄ $xy' - y = x^2$
   (c) $y' - xy = e^{\frac{x(x+2)}{2}}$
   (d) $y' \operatorname{tg} x - y = 1$
   (e) $y' = -\frac{3}{x}y + \frac{2}{x^3}$, $y(1) = 3$
   (f) $y' = y + e^x$, $y(2) = -3$
   (g) $y' - \frac{5y}{x} = x^2$
   (h) $y' - \frac{3x^2 y}{1+x^3} = 1 + x^3$, $y(1) = -1$
   (i) $xy' + (x+1)y = 3x^2 e^{-x}$
   (j) $xy' + 2y = 3x$, $y(0) = 0$
   (k) $y' + y \cos x = \sin x \cos x$, $y(0) = 1$
   (l) $(1 - x^2)y' + xy = 1$, $y(0) = 1$
   (m) $y' - y\frac{\cos x}{\sin x} = 2 \sin x$
   (n) $y' + 3y = e^{2x}$
   (o) $y' + y = \cos x$
   (p) $xy' - \frac{y}{x+1} = x$
   (q) $y' + y \operatorname{tg} x = \cos^2 x$, $y(2\pi) = 2$
   (r) $y' - 2yx = x - x^3$, $y(1) = 1$
   (s) $y' + \frac{2y}{x^2-1} = x$, $y(0) = 1$

Zkouškové příklady

2. Najděte řešení diferenciálních rovnic

   (a) $y' + \frac{y}{x} = e^{x^2}$
   (b) $y' - y \ln x = x^{x+1}$
   (c) ❀ $xy' - 2y = 2x^4$
   (d) $y' + 3x^2 y = e^{-x^3+x} \sin x$
   (e) $y'(1 + x^2) + \frac{y}{\arctan x} = x^2(1 + x^2)$
   (f) $y' + \frac{xy}{1+x^2} = 1$

(1b) lze slepit
(2c) lze slepit