23. cvičení - ODR se separovanými proměnnými

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Definice 1. Nechť $g : (a, b) \to \mathbb{R}$, $h : (c, d) \to \mathbb{R}$ jsou funkce. Rovnici tvaru

$$y' = g(x)h(y)$$

nazveme *ODR se separovanými proměnnými*. *Počátečními podmínkami* rozumíme rovnici $y(x_0) = y_0$.

Věta 2. Nechť $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $c < d$. Nechť $h : (a, b) \to \mathbb{R}$ je **spojitá** a $g : (c, d) \to \mathbb{R}$ je **spojitá a nenulová**. Nechť $[x_0, y_0] \in (a, b) \times (c, d)$.

Označme

$$H(x) = \int_{x_0}^{x} h(t)\,\mathrm{d}t, \qquad x \in (a, b),$$

$$G(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(t)}\,\mathrm{d}t, \qquad y \in (c, d).$$

Potom existuje právě jedno maximální řešení y rovnice $y' = g(y)h(x)$ splňující podmínku $y(x_0) = y_0$. Definičním intervalem I tohoto řešení je maximální interval ze všech intervalů tvaru $(x_0 - \delta, x_0 + \eta)$, které splňují $(x_0 - \delta, x_0 + \eta) \subset (a, b)$ a

$$H(x) \in G((c, d)), \qquad x \in I.$$

Věta 3. Nechť reálná funkce y je spojitá zprava v bodě $a \in \mathbb{R}$ a existuje $\lim_{x\to a_+} y'(x)$. Pak existuje $y'_+(a)$ a platí

$$y'_+(a) = \lim_{x\to a_+} y'(x).$$

Levá strana analogicky.

Lemma 4. Nechť $y_1(x) = (a, x_0) \to \mathbb{R}$, $y_2(x) = (x_0, b) \to \mathbb{R}$ jsou řešení rovnice

$$y' = F(x, y). \tag{1}$$

Nechť $\lim_{x\to x_0-} y_1(x) = y_0 = \lim_{x\to x_0+} y_2(x)$. Nechť $F(x, y)$ je spojitá v bodě $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Pak funkce

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x), & x \in (a, x_0), \\ y_0, & x = x_0, \\ y_2(x), & x \in (x_0, b) \end{cases}$$

je řešením rovnice v celém (a, b).

Hint

$$\int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x}\,\mathrm{d}x$$

Příklady

1. Najděte řešení diferenciálních rovnic (bez lepení):

   (a) $y'/y^2 = e^x$, $y(0) = \frac{1}{2}$

   (b) $y'/y = 4x$, $y(0) = 3$

   (c) $y' = 4xy$

   (d) $y'/y = 1/(x-1)$, načrtněte

2. Najděte řešení diferenciálních rovnic (nezapomeňte na případná lepení):

   (a) $y' = 2\sqrt{y}$
      i. obecně
      ii. $y(0) = -1$;
      iii. $y(1) = 0$;
      iv. $y(4) = 1$;

   (b) $y' = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

   (c) $y' = \sqrt[3]{y}$

   (d) $y' = yx$

   (e) $y' = \sqrt{1-y^2}$

   (f) $y'y = x^3$

   (g) $y' = x\sqrt[3]{y^2}$

3. Příklady ze starších písemek (bez lepení).

   (a) $y' = xe^x y$, $y(1) = 1$

   (b) $y'(1+x^2) = (1+y^2)$

   (c) $y' = \sin x \sin y$, $y(0) = \frac{\pi}{2}$

4. Příklady ze starších písemek.

   (a) $y' = x\sqrt[3]{1-y}$

   (b) $y' = x\sqrt{y}$

   (c) $y' \sin x = 2y \ln y$

   (d) $y' = xe^{-y}\sqrt[3]{e^y - 1}$

5. Je nalezena zkamenělá kost, u které se podařilo určit, že obsahuje 0.1% hmotnosti C-14, než kterou obsahovala původně. Určete stáří fosilie, víte-li, že poločas rozpadu C-14 je 5730 let.

6. Do uzavřeného školního kampusu o 1000 studentech přijel jeden z nich s chřipkou. Předpokládejme, že rychlost šíření infekce závisí jak na množství již nakažených studentů, tak na množství dosud zdravých. Určete množství studentů nakažených 6. den pokud víte, že po čtyřech dnech bylo nakaženo již 50 studentů. (Odpovídající diferenciální rovnice: $y' = ky(1000-y)$, $y(0) = 1$, $y(4) = 50$.)

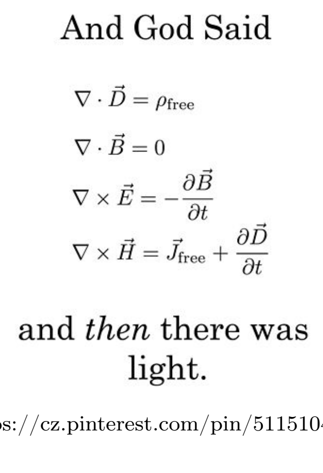

Figure 1: https://cz.pinterest.com/pin/511510470149523661/