22. cvičení - Konvergence Newtonova integrálu 2

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Věta 1. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je **spojitá** funkce na $[a, b]$. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Věta 2 (limitní srovnávací kritérium)**.** Nechť $-\infty \le a < b < \infty$ a nechť $a < b$. Nechť f, g jsou **spojité** a nechť g je **kladná** na $(a, b]$.

1. Jestliže $\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)}$ je vlastní a $\int_a^b f$ diverguje, pak také $\int_a^b g$ diverguje.
2. Jestliže $\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)}$ je vlastní a nenulová, pak $\int_a^b f$ diverguje právě tehdy, když $\int_a^b g$ diverguje.
3. Jestliže $\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)}$ je nevlastní a $\int_a^b f$ konverguje, pak také $\int_a^b g$ konverguje.

Věta 3 (srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ a nechť $a < b$. Nechť funkce $f, g : (a, b] \to \mathbb{R}$ splňují $0 \le f(x) \le g(x)$, $x \in (a, b]$. Nechť dále je f **spojitá** na $(a, b]$ a platí $g \in \mathcal{N}(a, b)$. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Věta 4 (Bolzano-Cauchyova podmínka)**.** Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a, b)$. Pak integrál $\int_a^b f$ konverguje právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $b' \in (a, b)$ takové, že pro každé dva body x_1, x_2 splňující $b' < x_1 < x_2 < b$ platí

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f \right| < \varepsilon.$$

Příklady

1. Vyšetřete **absolutní** konvergenci integrálů, $\alpha, \beta, a, b, k, p, q, s \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$:

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x^2}{\sqrt{1+x^3}}\,\mathrm{d}x$

(b) ♡ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{tg}^\alpha x\,\mathrm{d}x$

(c) ❀ $\displaystyle\int_0^\pi \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x$

(d) ✻ $\displaystyle\int_1^\infty \sin(x^\alpha)\,\mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

(f) $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x$

(g) ❆ $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x^p}{x^q}\,\mathrm{d}x$

(h) i. $\displaystyle\int_0^1 \frac{|\ln x|^\alpha}{1+x^k}\,\mathrm{d}x$

ii. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{|\ln x|^\alpha}{1+x^k}\,\mathrm{d}x$

(i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$

(j) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$

(k) $\displaystyle\int_0^\infty x^\alpha \arctan^\beta x\,\mathrm{d}x$

(l) $\displaystyle\int_0^\infty x^a + x^b\,\mathrm{d}x$

(m) $\displaystyle\int_0^1 x^{\ln x}\,\mathrm{d}x$

(n) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\arctan(x-1)}{(x-\sqrt{x})^p}\,\mathrm{d}x$

(o) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan px}{x^n}\,\mathrm{d}x$

(p) ❀ $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x$

(q) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x\ln^2(1+x)}\,\mathrm{d}x$

2. Vyšetřete **absolutní** konvergenci integrálů, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

   Zdroj: http://www.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/index.html

   (a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctan x^2}{x^\gamma} \sin(2x)\,\mathrm{d}x,\ \gamma > 0$

   (b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\arctan x)^\alpha \frac{\sin x}{2x+1}\,\mathrm{d}x$

   (c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^\alpha x \sin^\beta x\,\mathrm{d}x$

   (d) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\ln^\alpha(1+x)\sin^\beta x}{x^2(\pi-x)^3}\,\mathrm{d}x$

   (e) $\displaystyle\int_0^1 (\arcsin x - x)^\alpha \frac{\sin^\beta(\pi x)}{(1-x)^\alpha}\,\mathrm{d}x$

   (f) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \arctan^\alpha(\sqrt{x}) \sin^\beta\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$

   (g) $\displaystyle\int_0^1 (\arcsin x - x)^\alpha \sin^\beta(\pi x)\cos^\alpha\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

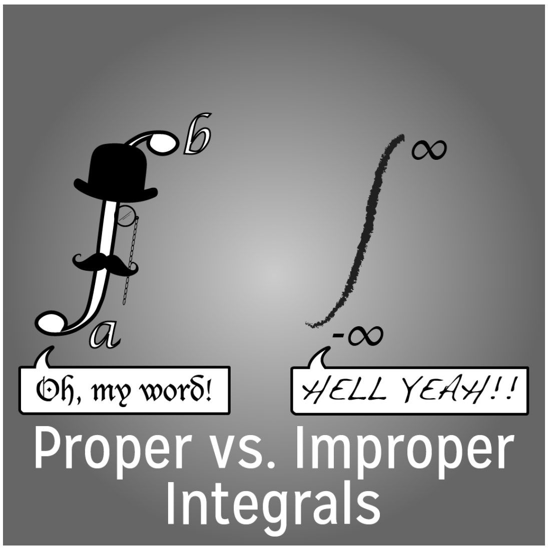
3. Buď f spojitá a nezáporná funkce na intervalu $[a,\infty)$, $a > 0$. Nechť existuje $\lim_{x\to\infty} f(x)\cdot x^\alpha = A$. Co můžeme říct o konvergenci $\int_a^\infty f$ v závislosti na A a α?

4. Buď f spojitá a nezáporná funkce na intervalu $[a,b)$, $a, b \in \mathbb{R}$. Nechť existuje $\lim_{x\to b-} f(x)\cdot (x-b)^\alpha = A$. Co můžeme říct o konvergenci $\int_a^b f$ v závislosti na A a α?

5. Ukažte divergenci pomocí B-C podmínky.

   (a) $\displaystyle\int_1^\infty x^\alpha \ln(1+x)|\cos x|\,\mathrm{d}x,\ \alpha \geq 0.$

   (b) $\displaystyle\int_0^1 x^\alpha \arctan x \cos\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x,\ \alpha \leq -3.$



(1b) u $\frac{\pi}{2}$: $\tan x = \sin x / \cos x$, pak užijte srovnávací tabulku pro $\cos x$.
(1c) u π srovnejte $\sin x$ s $\pi - x$.
(1d) Pro $\alpha > 0$ substitujte $y = x^\alpha$.
(1g) Pro $p < 0$ převeďte na $\int \frac{\sin y}{y^r}$.
(1p) $1 - x^4 = (1+x^2)(1-x)(1+x)$.