21. cvičení - Konvergence Newtonova integrálu

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Vyšetřete **absolutní** konvergenci integrálů ($\alpha, a, b, p, q \in \mathbb{R}$):

   (a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ K

   Řešení: Na intervalu $[0,1]$ je funkce f spojitá - spojitá funkce na omezeném uzavřeném intervalu konverguje. Stačí tedy vyšetřit $\int_1^\infty \frac{1}{1+x^2}$.
   Z limitního srovnávacího kritéria s $g = \frac{1}{x^2}$ máme

   $$\lim_{x\to\infty} \frac{f}{g} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{x^2}} = 1 \in (0,\infty).$$

   Obě funkce jsou na $[1,\infty)$ spojité, kladné. Protože $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}$ konverguje, konverguje i $\int_1^\infty f(x)$.
   Dohromady $\int_0^\infty \frac{1}{x^2}$ konverguje.

   (b) $\displaystyle\int_0^\infty x^a\,\mathrm{d}x$ D

   Řešení:

   i. $\displaystyle\int_0^1 x^a\,dx$, kde $a \in \mathbb{R}$.
   Protože integrand je nezáporný, stačí vyšetřovat absolutní konvergenci.
   Pro $a \neq -1$ je

   $$\int x^a\,dx \overset{C}{=} \frac{x^{a+1}}{a+1}$$

   primitivní funkcí k funkci x^a na $(0,1)$, a tedy také zobecněnou primitivní funkcí na $[0,1]$. Odtud je zřejmé, že pro $a > -1$ integrál konverguje a pro $a < -1$ diverguje (neboť limita zobecněné primitivní funkce v nule zprava existuje, ale není konečná).
   Pro $a = -1$ je

   $$\int \frac{1}{x}\,dx \overset{C}{=} \ln x$$

   primitivní funkcí k funkci $\frac{1}{x}$ na $(0,1)$,[1] a tedy také zobecněnou primitivní funkcí na $[0,1]$. Odtud je zřejmé, že pro $a = -1$ integrál diverguje (neboť limita zobecněné primitivní funkce v nule zprava existuje, ale není konečná).
   Konverguje (absolutně) pro $a > -1$.

   ii. $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^a\,dx$, kde $a \in \mathbb{R}$
   Pro $a \neq -1$ je

   $$\int x^a\,dx \overset{C}{=} \frac{x^{a+1}}{a+1}$$

[1] proto nemusíme psát ve výsledku absolutní hodnotu

primitivní funkcí k funkci x^a na $(1, +\infty)$. Odtud je zřejmé, že pro $a < -1$ integrál konverguje a pro $a > -1$ diverguje.
Pro $a = -1$ je

$$\int \frac{1}{x}\, dx \overset{C}{=} \ln x$$

primitivní funkcí k funkci $\frac{1}{x}$ na $(1, +\infty)$. Odtud je zřejmé, že pro $a = -1$ integrál diverguje.
Konverguje (absolutně) pro $a < -1$.

Závěr: Nekonverguje pro žádné $a \in \mathbb{R}$.

(c) $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{(3-x)^\alpha}$ $K \Leftrightarrow \alpha < 1$

Řešení: Převedeme substitucí $y = 3 - x$:

$$\int_1^3 \frac{1}{(3-x)^\alpha} = \int_0^2 \frac{1}{y^\alpha}\, \mathrm{d}y,$$

což konverguje právě tehdy, když $\alpha < 1$.

(d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}}\, \mathrm{d}x$ D

Řešení:

Na intervalu $[1, \infty)$ srovnáme s funkci $\frac{1}{x}$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^3+1}} = 1 \in (0, \infty).$$

Protože $\int_1^\infty \frac{1}{x}$ diverguje, diverguje i $\int_1^\infty f$.

(e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\, \mathrm{d}x$ K

Řešení: Konverguje, protože jde o spojitou funkci na uzavřeném omezeném intervalu.

(f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-x^3}\, \mathrm{d}x$ D

Řešení: Funkci lze rozložit jako

$$\frac{1}{1-x^3} = \frac{1}{(1-x)(x^2+x+1)}.$$

Aplikujeme LSk s $g = \frac{1}{1-x}$.

$$\lim_{x\to 1-} \frac{\frac{1}{(1-x)(x^2+x+1)}}{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x\to 1-} \frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{3} \in (0, \infty).$$

Ale

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x} = [-\ln|1-x|]_0^1 = \infty - 0.$$

Tedy i původní integrál diverguje.

(g) $\displaystyle\int_3^\infty \frac{x-1}{x^2+2x}\,\mathrm{d}x$ D

Řešení: Srovnáme LSK s $g = \frac{1}{x}$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x-1}{x^2+2x}}{\frac{1}{x}} = 1 \in (0,\infty).$$

Tedy i původní integrál diverguje.

(h) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$ K

Řešení: Na intervalu $[0,1]$ jde o spojitou funkci na omezeném a uzavřeném intervalu, tedy konverguje.

Na $[1,\infty)$ užijeme LSK s $\frac{1}{x^2}$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x^3+1}}{\frac{1}{x^2}} = 1 \in (0,\infty).$$

Protože $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}$ konverguje, konverguje i původní integrál.

(i) $\displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x$

Řešení:

i. $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x$

Budeme srovnávat LSK s $x^{p-1}\cdot 1$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{x^{p-1}} = \lim_{x\to 0}(1-x)^{q-1} = 1 \in (0,\infty)$$

Tedy náš integrál konverguje právě tehdy, když $p-1 > -1$, tedy pro $p > 0$.

ii. $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x$

U jedničky srovnáme LSK s $1\cdot(1-x)^{q-1}$. Máme

$$\lim_{x\to 1-} \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{(1-x)^{q-1}} = \lim_{x\to 1-} x^{p-1} = 1 \in (0,\infty)$$

Tedy náš integrál u jedničky konverguje právě tehdy, když konverguje integrál $\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)^{q-1}$. Převedeme substitucí $y = 1-x$:

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)^{q-1} = \int_0^{\frac{1}{2}} y^{q-1}\,\mathrm{d}y,$$

který konverguje právě pro $q-1 > -1$, tedy pro $q > 0$.

Závěr: $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když $p, q > 0$.

(j) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^p}{1+x^q}\,\mathrm{d}x$

Řešení:

i. $\int_0^1 \frac{x^p}{1+x^q}\,\mathrm{d}x$

A. $q \geq 0$: "1 je silnější než x^q" Srovnáváme s funkcí $\frac{x^p}{1}$, tedy

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^p}{1+x^q}}{x^p} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x^q} = \begin{cases} 1, & q > 0 \\ \frac{1}{2}, & q = 0. \end{cases}$$

Tedy náš integrál konverguje právě tehdy, když $p > -1$.

B. $q < 0$: "x^q je silnější než 1"
Srovnáváme s funkcí $\frac{x^p}{x^q}$, tedy

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^p}{1+x^q}}{\frac{x^p}{x^q}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^q}{1+x^q} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x^{-q}} = 1$$

Tedy náš integrál konverguje právě tehdy, když $p - q > -1$.

ii. $\int_1^\infty \frac{x^p}{1+x^q}\,\mathrm{d}x$

A. $q \geq 0$: "x^q je silnější než 1"
Srovnáváme s funkcí $\frac{x^p}{x^q}$, tedy

$$\lim_{x\to \infty} \frac{\frac{x^p}{1+x^q}}{\frac{x^p}{x^q}} = \lim_{x\to \infty} \frac{x^q}{1+x^q} = \begin{cases} 1, & q > 0 \\ \frac{1}{2}, & q = 0. \end{cases}$$

Tedy náš integrál konverguje právě tehdy, když $p - q < -1$.

B. $q < 0$: "1 je silnější než x^q" Srovnáváme s funkcí $\frac{x^p}{1}$, tedy

$$\lim_{x\to \infty} \frac{\frac{x^p}{1+x^q}}{x^p} = \lim_{x\to \infty} \frac{1}{1+x^q} = 1$$

Tedy náš integrál konverguje právě tehdy, když $p < -1$.

Závěr: $\int_0^\infty \frac{x^p}{1+x^q}\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když

$$\begin{aligned} &(q \geq 0 \quad \& \quad p > -1 \quad \& \quad p - q < -1) \\ \vee&(q > 0 \quad \& \quad p < -1 \quad \& \quad p - q > -1) \end{aligned}$$

Lze zapsat i jako:

$$\begin{aligned} &(q > p + 1 \quad \& \quad p > -1) \\ \vee&(q < p + 1 \quad \& \quad p < -1) \end{aligned}$$

(k) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Ze SK:

$$\frac{e^{-x}}{x} \leq e^{-x}.$$

Protože $\int_1^\infty e^{-x} = \frac{1}{e}$, tak konverguje i původní integrál.

(l) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{1-\cos(ax)}{x^p}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Jestliže $a = 0$, tak je $f \equiv 0$ a integrál konverguje pro všechna $p \in \mathbb{R}$.
Nechť $a \neq 0$. Užijeme LSK s $g = \frac{x^2}{x^p}$.

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1-\cos(ax)}{x^p}}{\frac{x^2}{x^p}} = \frac{1-\cos(ax)}{a^2x^3} a^2 = \frac{a^2}{2} \in (0,\infty).$$

Tedy původní integrál konverguje právě pro $p - 2 < 1$, tedy $p < 3$.

(m) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Aplikujeme substituci $y = \sqrt{x}$. Pak

$$\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^\infty ye^{-y},$$

což je ale konvergentní integrál.

(n) $\displaystyle\int_0^\infty (\pi - 2\arctan x)^\alpha\,\mathrm{d}x$

Řešení:

i. $\displaystyle\int_0^1 (\pi - 2\arctan x)^\alpha\,\mathrm{d}x$

Funkce je na intervalu $[0,1]$ spojitá. Konkrétně

$$\lim_{x\to 0+} (\pi - 2\arctan x)^\alpha = \pi^\alpha.$$

Spojitá funkce na omezeném uzavřeném intervalu $\to$ integrál je konvergentní.

ii. $\displaystyle\int_1^\infty (\pi - 2\arctan x)^\alpha\,\mathrm{d}x$

U ∞ srovnáme s $x^{-\alpha}$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\pi - 2\arctan x)^\alpha}{x^{-\alpha}} = 2^\alpha \in (0,\infty).$$

Náš integrál tedy konverguje právě pro $-\alpha < -1$, tedy $\alpha > 1$.

Závěr: Původní integrál tedy konverguje právě pro $-\alpha < -1$, tedy $\alpha > 1$.

(o) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arccot}^a x}{x^b}\,dx$

Integrand f je nezáporná funkce, stačí tedy vyšetřovat absolutní konvergenci. K tomu použijeme limitní srovnávací kritérium a rozklad

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arccot}^a x}{x^b}\,dx = \int_0^1 \frac{\operatorname{arccot}^a x}{x^b}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arccot}^a x}{x^b}\,dx$$

Má-li totiž (absolutně) konvergovat integrál vlevo, pak také konvergují (absolutně) oba integrály vpravo (integrujeme přes menší množinu). Naopak, pokud (absolutně) konvergují integrály vpravo, pak také konverguje (absolutně) integrál vlevo (existencí integrálů je zaručena existence primitivní funkce na celém intervalu i konečnost integrálu).

Vyšetřujme nyní (absolutní) konvergenci integrálu

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arccot}^a x}{x^b}\,dx$$

Funkce $\frac{\operatorname{arccot}^a x}{x^b}$ je spojitá a nezáporná na $(0,1]$, a protože

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\operatorname{arccot}^a x}{x^b}}{\frac{1}{x^b}} = \lim_{x\to 0+} \operatorname{arccot}^a x = (\pi/2)^a$$

je (absolutní) konvergence vyšetřovaného integrálu ekvivalentní (absolutní) konvergenci integrálu

$$\int_0^1 \frac{1}{x^b}\,dx$$

Přímým výpočtem se přesvědčíme, že tento integrál konverguje pro $b < 1$.
Vyšetřujme nyní (absolutní) konvergenci integrálu

$$\int_1^\infty \frac{\operatorname{arccot}^a x}{x^b}\,dx$$

Funkce $\frac{\operatorname{arccot}^a x}{x^b}$ je spojitá a nezáporná na $[1, +\infty)$, a protože

$$\lim_{x\to+\infty} x \operatorname{arccot} x = 1,$$

platí také, že

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\operatorname{arccot}^a x}{x^b}}{\frac{1}{x^{a+b}}} = \lim_{x\to 0+} x^a \operatorname{arccot}^a x = 1,$$

a tudíž je (absolutní) konvergence vyšetřovaného integrálu ekvivalentní (absolutní) konvergenci integrálu

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{a+b}}\,dx$$

Přímým výpočtem se přesvědčíme, že tento integrál konverguje pro $a + b > 1$ a diverguje jinak.
Závěr: Integrál konverguje (absolutně), pokud $1 > b > 1 - a$. Jinak diverguje.

(p) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \arctan \frac{x}{x^2+1} \ln^a x\,dx$

Řešení:
Integrand je nezáporný, stačí vyšetřovat absolutní konvergenci.
Na pravém okolí jedničky je

$$\arctan \frac{x}{x^2+1} \approx \frac{1}{2}, \qquad \ln x = \ln(1 + (x-1)) \approx (x-1)$$

(jak dostaneme použitím Taylorova rozvoje logaritmu v nule). Odtud plyne, že konvergence integrálu

$$\int_1^2 f(x)\,dx$$

je podle limitního srovnávacího kritéria ekvivalentní konvergenci integrálu

$$\int_1^2 (x-1)^a\,dx$$

a použitím substituce $y = x - 1$ dostaneme, že tento je ekvivalentní integrálu

$$\int_0^1 y^a\,dy$$

Poslední integrál konverguje, a to absolutně, pro $a > -1$.

Naopak na okolí nekonečna je

$$\arctan \frac{x}{x^2+1} \approx \frac{1}{x}$$

a podle limitního srovnávacího kritéria je konvergence integrálu

$$\int_2^{+\infty} f(x)\,dx$$

ekvivalentní konvergenci integrálu

$$\int_2^{+\infty} \frac{\ln^a x}{x}\,dx$$

U tohoto integrálu ale umíme přímo určit primitivní funkci. Na intervalu $(2, +\infty)$ platí, že

$$\int \frac{\ln^a x}{x}\,dx = \int y^a\,dy = \frac{y^{a+1}}{a+1} + C = \frac{\ln^{a+1} x}{a+1} + C$$

pro $a \neq -1$. Odtud přímo vyplývá, že integrál konverguje pro $a+1 < 0$, tedy pro $a < -1$.

Hodnotu $a = -1$ lze také vyloučit přímým výpočtem, ale vzhledem k podmínce u jedničky to není nutné.

(q) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^4}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Integrál konverguje absolutně, neb $\frac{|\sin x|}{x^4} \leq \frac{1}{x^4}$.

2. Nechť f je definována na intervalu (a, ∞), je spojitá a $f \geq 0$ na (a, ∞). Nechť existuje limita $\lim_{x\to\infty} f(x) = A > 0$. Ukažte, že pak $\int_a^\infty f = \infty$.

   Řešení:

   Z definice limity existuje $b > a$ takové, že $0 < A/2 \leq f(x)$ na (b, ∞). Ze srovnávacího kritéria a nezápornosti f pak máme

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_b^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_b^\infty \frac{A}{2}\,\mathrm{d}x = \infty.$$

3. Nechť $f \geq 0$, $f \in \mathcal{N}(0,1)$. Dokažte, že pak i $x^k f \in \mathcal{N}(0,1)$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$.

   Řešení:

   Máme odhad

$$|x^k f(x)| \leq 1 \cdot |f(x)| \in \mathcal{N}(0,1).$$

   Tedy ze SK i $x^k f(x) \in \mathcal{N}(0,1)$.