



21. cvičení - Konvergence Newtonova integrálu

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Věta 1. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je **spojitá** funkce na $[a, b]$. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Věta 2 (limitní srovnávací kritérium). Nechť $-\infty < a < b \leq \infty$ a nechť $a < b$. Nechť f, g jsou **spojité** a nechť g je **kladná** na $[a, b]$.

1. Jestliže $\lim_{x \rightarrow b-} \frac{f(x)}{g(x)}$ je vlastní a $\int_a^b g$ konverguje, pak také $\int_a^b f$ konverguje.
2. Jestliže $\lim_{x \rightarrow b-} \frac{f(x)}{g(x)}$ je vlastní a nenulová, pak $\int_a^b f$ konverguje právě tehdy, když $\int_a^b g$ konverguje.
3. Jestliže $\lim_{x \rightarrow b-} \frac{f(x)}{g(x)}$ je nevlastní a $\int_a^b g$ diverguje, pak také $\int_a^b f$ diverguje.

Věta 3 (srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu). Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$ a nechť $a < b$. Nechť funkce $f, g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ splňují $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $x \in [a, b)$. Nechť dále je f **spojitá** na $[a, b)$ a platí $g \in \mathcal{N}(a, b)$. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Algoritmus

1. Možná je vhodné daný interval **roztrhnout** a vyšetřovat každý konec zvlášť.
2. Je funkce **spojitá na omezeném** intervalu? Lze ji **spojitě dodefinovat**?
3. Je možné integrál přímo **upočítat**? Je možné jej (např. substitucí) převést na tabulkový integrál?
4. **SK** a **LSK**. (Srovnávací a limitní srovnávací kritérium.)

Příklady

1. Vyšetřete **absolutní** konvergenci integrálů ($\alpha, a, b, p, q \in \mathbb{R}$):

(a) $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx$	(g) $\int_3^\infty \frac{x-1}{x^2+2x} dx$	(m) $\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}} dx$
(b) $\int_0^\infty x^\alpha dx$	(h) $\int_0^\infty \frac{x}{x^3+1} dx$	(n) $\int_0^\infty (\pi - 2 \arctan x)^\alpha dx$
(c) $\int_1^3 \frac{dx}{(3-x)^\alpha}$	(i) $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$	(o) $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arccot}^a x}{x^b} dx$
(d) $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}} dx$	(j) $\int_0^\infty \frac{x^p}{1+x^q} dx$	(p) $\int_1^{+\infty} \arctan \frac{x}{x^2+1} \ln^a x dx$
(e) $\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} dx$	(k) $\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx$	(q) $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^4} dx$
(f) $\int_0^1 \frac{1}{1-x^3} dx$	(l) $\int_0^\pi \frac{1-\cos(ax)}{x^p} dx$	

2. Nechť f je definována na intervalu (a, ∞) , je spojitá a $f \geq 0$ na (a, ∞) . Nechť existuje limita $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A > 0$. Ukažte, že pak $\int_a^\infty f = \infty$.
3. Nechť $f \geq 0$, $f \in \mathcal{N}(0, 1)$. Dokažte, že pak i $x^k f \in \mathcal{N}(0, 1)$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$.

(1c) substituce $u = 3 - x$
 (1f) $1 - x^3 = (1-x)(1+x+x^2)$
 (1j) uvažujte kombinace záporných i kladných p i q . Pro
 představenou položte např. $d = \pm 3$ a $q = \pm 2$
 (1m) substituce $u = \sqrt{x}$
 (1n) $\ln(1+x^2) = x \operatorname{arccot} \frac{x}{1+x^2}$
 (1o) $\frac{x}{1+x^2} = x \operatorname{arccot} \frac{x}{1+x^2}$