



20. cvičení - Aplikace určitého integrálu

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Věta 1 (Integrální kritérium). Nechť f je **nezáporná nerostoucí spojitá** funkce na $[n_0, \infty)$, $n_0 \in \mathbb{N}$. Nechť pro posloupnost $\{a_n\}$ platí $a_n = f(n)$, $n \geq n_0$. Pak $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_{n_0}^{\infty} f(x) dx$.

Věta 2 (Objem a povrch rotačního tělesa). Nechť f je **spojitá a nezáporná** na intervalu $[a, b]$. Označme

$$T = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x \in [a, b], \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x)\}.$$

(= Rotační těleso, které vznikne rotací křivočarého lichoběžníka ohraničeného shora funkcí $f(x)$, osou x a přímkami $x = a$, $x = b$, kolem osy x .) Pak objem T je

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Nechť má f navíc spojitou derivaci $f'(x)$ na $[a, b]$. Pak povrch pláště T je

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Definice 3. *Křivkou* budeme rozumět spojitě zobrazení $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. *Křivkou třídy $\mathcal{C}^1$* rozumíme křivku $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ takovou, že φ'_i je spojitě na $[a, b]$, $i = 1, \dots, n$, přičemž v krajních bodech $[a, b]$ symbol $\varphi'_i(x)$ značí příslušnou jednostrannou derivaci.

Věta 4 (Délka oblouku křivky). Nechť má funkce f spojitou derivaci f' na intervalu $[a, b]$. Pak délka této křivky

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Nechť $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ je křivka třídy $\mathcal{C}^1$. Pak

$$L(\varphi) = \int_a^b \sqrt{(\varphi'_1(t))^2 + \dots + (\varphi'_n(t))^2} dt$$

Příklady

- Určete obsah útvaru, který je ohraničen křivkami $y = 3 - x$, $y = 0$, $x = 2$, $x = -3$.
 - Určete obsah útvaru, který je ohraničen křivkami $y = x^2 - x - 12$, $y = 0$.
 - Určete obsah útvaru, který je ohraničen křivkami $y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2\pi$.
 - Určete obsah útvaru, který je ohraničen křivkami $y = 2^x$, $y = x$, $x = -2$, $x = 1$.
 - Určete obsah útvaru, který je ohraničen křivkami $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$.
 - Určete objem tělesa, které vznikne rotací útvaru $y = 2$, $x = 0$, $x = 4$ kolem osy x .
 - Určete objem tělesa, které vznikne rotací útvaru $y = 3 - \frac{1}{2}x$, $x = 0$, $x = 4$ kolem osy x .

2. Spočítejte

- Určete délku grafu funkce $y = \ln x$ pro $x \in [\sqrt{3}, \sqrt{15}]$.
- Určete obsah pláště tělesa, které vznikne rotací grafu funkce $y = 4 + x$, $x \in [-4, 2]$, kolem osy x .
- Určete objem koule o poloměru $r > 0$.
- Určete objem kužele s poloměrem podstavy r a výškou v .
- Spočítejte objem rotačního tělesa, jehož plášť vznikne rotací křivky $y = e^x$ pro $x \in [0, 1]$ kolem osy y .

3. Spočítejte

- Určete délku grafu semikubické paraboly $y^2 = x^3$ pro $x \in [0, 1]$.
- ♥ Určete obsah plochy ohraničené křivkami $x^2 + y^2 = 2$ a $y = x^2$.
- ✿ Určete obsah plochy elipsy s poloosami a a b .
- Určete délku grafu řetězovky $y = a \cosh \frac{x}{a}$ pro $x \in [-1, 1]$, kde $a > 0$ je parametr.

4. Pomocí integrálního kritéria rozhodněte o absolutní konvergenci řad

- | | | |
|---|---|---|
| (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, \alpha \in \mathbb{R}$ | (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ | (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan^3 n}{1+n^2}$ |
| (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$ | (d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{\beta} n}, \beta \geq 0$ | (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ |

(3b) 2. věta o substituci, $x = \sqrt{2} \sin t$
 (3c) 2. věta o substituci, $x = a \sin t$