Příklady

(a)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}$$

Řešení: substituce $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$

$$\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}$$

$$\sin x = \frac{2t}{t^2+1}$$

tedy

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} \frac{1}{1+\frac{2t}{t^2+1}} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+2t+1} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{(t+1)^2} = -2\frac{1}{t+1}$$

Zpětná substituce:

$$F(x) := -2\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}$$

a to na intervalu $(-\pi;\pi)+2k\pi$, to je ze substituce $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Dále máme podmínky, $\sin x \neq -1$, tedy $x \neq -\pi/2 + 2k\pi$. Také máme podmínky $\operatorname{tg} \frac{x}{2} \neq -1$, které ale dávají stejnou podmínku na $x \neq -\pi/2$.
A jdeme lepit (VOLSF):

$$\lim_{x\to\pi-} F(x) = 0$$

$$\lim_{x\to-\pi+} F(x) = 0$$

takže nemusíme funkce nijak posouvat a je třeba dodefinovat krajní body, udělat podmínky a připojit konstantu.

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} -2\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}+1} + c & x \in (-\pi+2k\pi; \pi+2k\pi) \setminus \{-\pi/2+2k\pi\} \\ 0 + c & x = \pi + 2k\pi \end{cases}$$

V bodech $-\pi/2$ nelepíme, primitivní funkce tam vůbec není definovaná a ani původní integrál tam nedává smysl.
Na závěr se ještě podíváme na substituci. Volili jsme $\varphi(t) = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, tedy $\varphi^{-1}(x) = 2\arctan t$. Tedy φ je z $(-\pi,\pi)$ do $\mathbb{R}$, což nám zároveň dává intervaly, na nichž jsme získali primitivní funkci. (Nezapomene aplikovat podmínky, $t \neq -1$.)

(b) $f(x) = \dfrac{1}{2\sin x - \cos x + 5}$.

Řešení: Funkce f je zřejmě spojitá na $\mathbb{R}$, a tudíž k ní na $\mathbb{R}$ existuje primitivní funkce. K jejímu nalezení použijeme substituci $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ na každém z intervalů $I_k = (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Podle transformačních vztahů máme, že na každém z intervalů I_k platí

$$\int \frac{\cancel{1}\;2}{4t - 1 + t^2 + 5 + 5t^2}\,\mathrm{d}t == \int \frac{1}{3t^2 + 2t + 2}\,dt \overset{C}{=} \frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{3t+1}{\sqrt{5}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}}.$$

Můžeme tedy psát, že

$$F(x) = \int \frac{1}{2\sin x - \cos x + 5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} + C_k, \qquad x \in I_k.$$

Zřejmě

$$\lim_{x \to (\pi + 2\pi k)-} F(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{5}} + C_k, \qquad \lim_{x \to (\pi + 2\pi k)+} F(x) = -\frac{\pi}{2\sqrt{5}} + C_{k+1}.$$

Z požadavku spojitosti na funkci F v bodě $(\pi + 2\pi k)$ tedy vyplývá, že

$$\frac{\pi}{2\sqrt{5}} + C_k = -\frac{\pi}{2\sqrt{5}} + C_{k+1}$$

odkud ihned máme, že

$$C_{k+1} = \frac{\pi}{\sqrt{5}} + C_k.$$

Tato podmínka volbou jedné libovolné z konstant C_k určuje všechny ostatní. Například indukcí lze lehko ukázat, že

$$C_k = \frac{\pi k}{\sqrt{5}} + C_0, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Pro funkci F tedy můžeme psát

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{5}}\arctan\dfrac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} + \dfrac{\pi k}{\sqrt{5}} + C_0, & x \in (-\pi + 2\pi k, \pi + 2\pi k) \\ \dfrac{(2k+1)\pi}{2\sqrt{5}} + C_0, & x = \pi + 2\pi k \end{cases}$$

Protože víme, že $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in \cup_{k \in \mathbb{Z}} I_k$, z věty o limitě derivace díky spojitosti funkce f a F na $\mathbb{R}$ vyplývá, že $F'(x) = f(x)$ i ve styčných bodech jednotlivých intervalů, tedy na celém $\mathbb{R}$.

(c)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2-\sin x}$$

Řešení: Jako výše, $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Máme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2-\sin x} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} \cdot \frac{1}{2-\frac{2t}{t^2+1}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-t+1} =$$

$$\int \frac{4}{3} \frac{\mathrm{d}t}{\left(\frac{t-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan \frac{2t-1}{\sqrt{3}}$$

Zpětná substituce:

$$F(x) := \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}-1}{\sqrt{3}}$$

na intervalu (viz výše) $(-\pi, \pi) + 2k\pi$

Lepení (VOLSF):

$$\lim_{x\to\pi-} F(x) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

$$\lim_{x\to-\pi+} F(x) = -\frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

Tedy budeme posouvat o $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ a dodefinujeme v krajních bodech pomocí právě zjištěných limit, přidáme konstantu.

Celkem máme:

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}-1}{\sqrt{3}} + k\pi\frac{2}{\sqrt{3}} + c & x \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi) \\ \frac{\pi}{\sqrt{3}} + k\pi\frac{2}{\sqrt{3}} + c & x = \pi + 2k\pi \end{cases}$$

Podmínky substituce jsou stejné, jako u prvního příkladu.

(d)

$$\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$$

Řešení: Funkce je sudá v obou proměnných, tedy $t = \tan x$, $\sin^2 x = \frac{t^2}{t^2+1}$, $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$. Máme:

$$\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{t^2}{t^2+1}}{1+\frac{t^2}{t^2+1}} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \int \frac{t^2}{(1+t^2)(2t^2+1)}\,\mathrm{d}t =$$

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} - \int \frac{\mathrm{d}t}{2t^2+1} = \arctan t - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan \sqrt{2}t$$

Tedy
$$F(x) = \text{arctan tan } x - \frac{1}{\sqrt{2}}\text{arctan } \sqrt{2}\text{tan } x$$
Tangens je definován na $(-\pi/2; \pi/2)$, tedy k lepení potřebujeme
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} F(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\pi}{2} = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)\frac{\pi}{2}$$
$$\lim_{x\to\frac{-\pi}{2}+} F(x) = -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\pi}{2} = -\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)\frac{\pi}{2}$$
Celkem:
$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} \text{arctan tan } x - \frac{1}{\sqrt{2}}\text{arctan } \sqrt{2}\text{tan } x + k\pi\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + c \\ \qquad x \in (-\pi/2 + k\pi; \pi/2 + 2\pi) \\ \frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + k\pi\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + c & x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$$
Substituce byla $\varphi : \tan x = t$ je definována na $(-\pi/2; \pi/2)$ zobrazuje do $\mathbb{R}$.

(e)
$$\int \frac{1}{(1-\cos^2 x)(1+\cos^2 x)}\,\mathrm{d}x$$
Řešení: Funkce je definovaná (a spojitá) na intervalech $(0 + k\pi, \pi + k\pi)$. Zároveň je sudá v obou proměnných, bude tedy vhodná substituce $t = \cot x$ (místo obvyklého tangens). Použijeme transformační vztahy
$$\mathrm{d}x = \frac{-1\,\mathrm{d}t}{t^2+1}, \qquad \sin^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \qquad \cos^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \qquad \sin x \cos x = \frac{t}{1+t^2}$$
a dostaneme
$$\int \frac{1}{\frac{1}{1+t^2}\left(1+\frac{t^2}{1+t^2}\right)}\frac{-1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = -\int \frac{1+t^2}{1+2t^2}\,\mathrm{d}t = -\int \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+2t^2}\,\mathrm{d}t$$
$$= -\frac{1}{2}t - \frac{1}{2\sqrt{2}}\text{arctan } (\sqrt{2}t) + c_k$$
Zasubstituujeme zpět a máme
$$F(x) = -\frac{1}{2}\cot x - \frac{1}{2\sqrt{2}}\text{arctan } (\sqrt{2}\cot x) + c_k$$
pro $x \in (0 + k\pi, \pi + k\pi)$.
Funkce se při téhle substituci nelepí.

(f) $f(x) = \dfrac{1 + \sin x}{2 + \cos x}$

Řešení:

Ilja Černý

str. 154, př. 9.11b

(g) $f(x) = \dfrac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x + 4\cos^2 x}$

Řešení: Ilja Černý

str. 155, př. 9.11c

(h) $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$

Řešení: Ilja Černý

str. 139, př. 9.6

(i) $f(x) = \dfrac{1}{\sin x + 2}$

Řešení:

Holicky Kalenda str. 25

Příklad 9.11b. Na rozdíl od příkladu 9.11a je funkce

$$f(x) := \frac{1+\sin x}{2+\cos x} \tag{91}$$

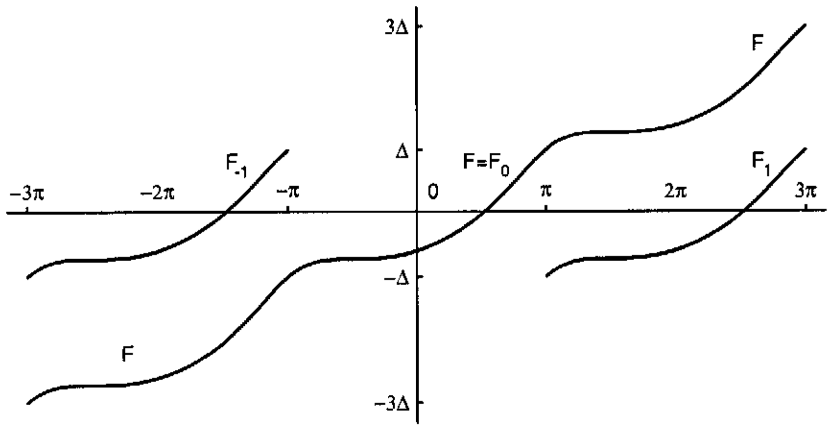
spojitá v celém $\mathbb{R}$. Aplikace 2SM s funkcí $\omega(t) = 2\operatorname{arctg} t$ vede k rovnostem

$$\begin{aligned} h(t) := f(\omega(t))\,\omega'(t) &= \frac{(1+t)^2}{3+t^2}\,\frac{2}{1+t^2} = \frac{2}{3+t^2} + \frac{2t}{1+t^2} - \frac{2t}{3+t^2} \\ &= \Big(\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}} + \lg\frac{1+t^2}{3+t^2}\Big)' \end{aligned}$$

platným pro všechna $t \in \mathbb{R}$; funkce

$$F_0(x) := \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\Big(\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}x}{\sqrt{3}}\Big) + \lg\frac{1+\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}x}{3+\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}x} \tag{92}$$

je proto funkcí primitivní k $f(x)$ v I_0.



K PŘÍKLADU 9.11B

Položme $F_0(\pi) := F_0(\pi-) = \pi/\sqrt{3}$; takto rozšířená funkce F_0 je spojitá v intervalu $I_0^* := (-\pi, \pi\rangle$. Pro každé $k \in \mathbb{Z}$ označme

$$I_k := ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)\,, \quad I_k^* := ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi\rangle \tag{93}$$

a v I_k^* definujme funkci F_k podmínkou $F_k(x) := F_0(x - 2k\pi)$. (Protože funkce F_0 je 2π-periodická, je $F_k(x)$ v I_k rovno pravé straně rovnosti (92) a $F_k((2k+1)\pi) := \pi/\sqrt{3}$.) Funkce F_k je spojitá v I_k^* a zároveň je funkcí primitivní k f v I_k. Položíme-li

$$\Delta := F_k((2k+1)\pi) - F_{k+1}((2k+1)\pi+) = F_0(\pi) - F_0(-\pi+) = \tfrac{2}{3}\sqrt{3}\pi\,, \tag{94}$$

je funkce $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná podmínkou

$$F := F_k + k\Delta \ \text{ v } \ I_k^* \ \text{ pro každé } \ k \in \mathbb{Z} \tag{95}$$

funkcí primitivní k f v celém $\mathbb{R}$.

Příklad 9.11c. Funkce

$$f(x) := \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x + 4\cos^2 x} \tag{96}$$

je spojitá v $\mathbb{R}$ a funkci k ní primitivní (v $\mathbb{R}$) lze najít pomocí 1SM: V intervalech $K_k := (\frac{1}{2}(2k-1)\pi, \frac{1}{2}(2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, vytkneme z čitatele i jmenovatele výraz $\cos^2 x$ a $f(x)$ upravíme na tvar

$$f(x) = \frac{\cos^2 x \cdot (\operatorname{tg}^2 x - 1)}{\cos^2 x \cdot (\operatorname{tg}^2 x + 4)} = \frac{\operatorname{tg}^2 x - 1}{(\operatorname{tg}^2 x + 1)(\operatorname{tg}^2 x + 4)} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\,; \tag{96'}$$

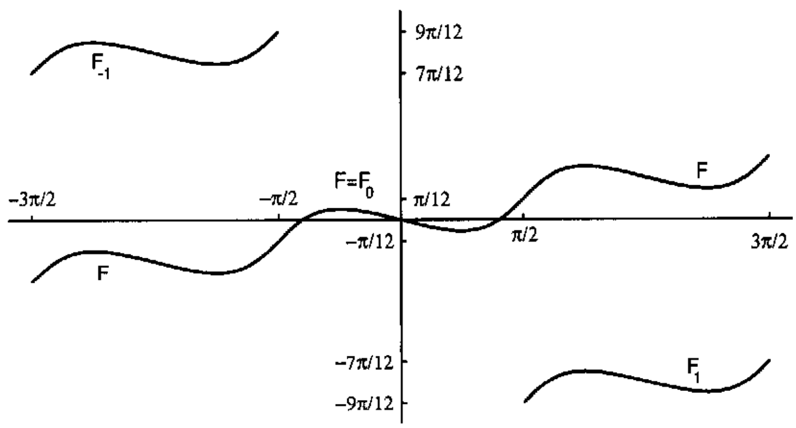
pak v 1SM položíme $\operatorname{tg} x = y$. Protože rovnosti

$$g(y) := \frac{y^2 - 1}{(y^2+1)(y^2+4)} = \frac{5}{3}\,\frac{1}{y^2+4} - \frac{2}{3}\,\frac{1}{y^2+1} = \Big(\frac{5}{6}\operatorname{arctg}\frac{y}{2} - \frac{2}{3}\operatorname{arctg} y\Big)'$$

platí všude v $\mathbb{R}$, je funkce

$$F_k(x) := \tfrac{5}{6}\operatorname{arctg}(\tfrac{1}{2}\operatorname{tg} x) - \tfrac{2}{3}x \tag{97}$$

funkcí primitivní k $f(x)$ v K_k.



K PŘÍKLADU 9.11C

Funkci F_k rozšíříme spojitě na interval $K_k^* := (\frac{1}{2}(2k-1)\pi, \frac{1}{2}(2k+1)\pi)$ tím, že položíme $F_k(\frac{1}{2}(2k+1)\pi) := F_k(\frac{1}{2}(2k+1)\pi-) := \frac{5}{12}\pi - \frac{1}{3}(2k+1)\pi$; protože $F_{k+1}(\frac{1}{2}(2k+1)\pi+) = -\frac{5}{12}\pi - \frac{1}{3}(2k+1)\pi$, je

$$\Delta := F_k(\tfrac{1}{2}(2k+1)\pi) - F_{k+1}(\tfrac{1}{2}(2k+1)\pi+) = \tfrac{5}{6}\pi$$

a funkce $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná podmínkou

$$F := F_k + k\Delta \quad \text{v} \quad K_k^* \quad \text{pro každé} \quad k \in \mathbb{Z} \tag{98}$$

je funkcí primitivní k f v celém $\mathbb{R}$.

Příklad 9.11d. Funkce

$$f(x) := \frac{\sin x}{(2\cos x - 1)(2\sin^2 x - 1)} \tag{99}$$

má primitivní funkce v každém otevřeném intervalu neobsahujícím žádný bod x, v němž je buď $\cos x = \frac{1}{2}$, nebo $\sin x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Maximálními intervaly s touto vlastností jsou intervaly

$$\begin{aligned} A_k &:= (2k\pi - \tfrac{1}{3}\pi, 2k\pi - \tfrac{1}{4}\pi), & B_k &:= (2k\pi - \tfrac{1}{4}\pi, 2k\pi + \tfrac{1}{4}\pi), \\ C_k &:= (2k\pi + \tfrac{1}{4}\pi, 2k\pi + \tfrac{1}{3}\pi), & D_k &:= (2k\pi + \tfrac{1}{3}\pi, 2k\pi + \tfrac{3}{4}\pi), \\ E_k &:= (2k\pi + \tfrac{3}{4}\pi, 2k\pi + \tfrac{5}{4}\pi), & F_k &:= (2k\pi + \tfrac{5}{4}\pi, 2k\pi + \tfrac{5}{3}\pi), \end{aligned} \tag{100}$$

kde $k \in \mathbb{Z}$. V každém z nich napíšeme $f(x)$ ve tvaru

$$f(x) = \frac{-\sin x}{(2\cos x - 1)(2\cos^2 x - 1)}, \tag{99'}$$

položíme $\cos x = y$ a aplikujeme 1SM. Zbývá najít primitivní funkci funkce

$$g(y) := \frac{1}{(2y-1)(2y^2-1)} \tag{101}$$

v intervalech, které neobsahují žádný z bodů $\frac{1}{2}$, $\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Čtenář snadno ověří, že identita

$$g(y) = \frac{a}{2y-1} + \frac{b}{\sqrt{2}y - 1} + \frac{c}{\sqrt{2}y + 1}, \tag{102}$$

kde

$$a = -2, \quad b = \tfrac{1}{2}(\sqrt{2}+1), \quad c = \tfrac{1}{2}(\sqrt{2}-1), \tag{103}$$

je rozkladem $g(y)$ na jednoduché zlomky. Funkce

$$G(y) := -\lg|2y-1| + \frac{b}{\sqrt{2}}\lg|\sqrt{2}y - 1| + \frac{c}{\sqrt{2}}\lg|\sqrt{2}y + 1|, \tag{104}$$

Příklad 9.5. Funkce $f(x) := 1/\sqrt{e^x - 1}$ má podle V.9.2 primitivní funkci v $\mathbb{R}_+$. Položme $\sqrt{e^x - 1} = t$, tj. substituujme $x = \omega(t) := \lg(t^2+1)$. Všechny předpoklady 2SM jsou splněny, protože $\omega'(t) = 2t/(t^2+1) > 0$ pro všechna $t \in \mathbb{R}_+$ a $\omega(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$. Protože

$$f(\omega(t))\omega'(t) = \frac{1}{t}\,\frac{2t}{t^2+1} = \frac{2}{t^2+1} = (2\operatorname{arctg} t)' \ \text{ v } \mathbb{R}_+,$$

je $F(x) := 2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x - 1}$ funkcí primitivní k $f(x)$ v $\mathbb{R}_+$.

Příklad 9.6. Funkce

$$(18) \qquad f(x) := \frac{1}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$$

má podle V.9.2 primitivní funkci v celém $\mathbb{R}$, ale najít ji bude poněkud komplikovanější, protože standardní substituci $\operatorname{tg} x = y$ (sr. s příkladem 9.11) lze provést jen v intervalech, které neobsahují žádný bod tvaru $\frac{1}{2}(2k+1)\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

Pracujme v intervalech $I_k := (\frac{1}{2}(2k-1)\pi, \frac{1}{2}(2k+1)\pi)$, kde $k \in \mathbb{Z}$, a upravme (18) na tvar

$$(18^*) \qquad f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}\,\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x + 2} = \frac{(\operatorname{tg} x)'}{\operatorname{tg}^2 x + 2};$$

podle 1SM (s $\omega(x) = \operatorname{tg} x$) a podle (4) platí pro každé $k \in \mathbb{Z}$ rovnost

$$\frac{1}{y^2+2} = \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{2}}\Big)' \ \text{ v } \mathbb{R}, \ \text{ takže } f(x) = \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\Big)' \ \text{ v } I_k.$$

Funkce F_k definovaná v intervalu $I_k^* := (\frac{1}{2}(2k-1)\pi, \frac{1}{2}(2k+1)\pi\rangle$ podmínkami

$$(19) \qquad F_k(x) := \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} & \text{pro všechna } x \in I_k \\ F_k(\frac{1}{2}(2k+1)\pi-) = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}} & \text{pro } x = \frac{1}{2}(2k+1)\pi \end{array}\right\}$$

je spojitá v I_k^*, protože se její hodnota v koncovém bodě intervalu I_k rovná příslušné limitě zleva. Protože číslo $\Delta := F_k(\frac{1}{2}(2k+1)\pi-) - F_k(\frac{1}{2}(2k-1)\pi+) = \pi/\sqrt{2}$ nezávisí na k, je funkce F definovaná podmínkami

$$(20) \qquad F(x) := F_k(x) + k\Delta \ \text{ pro všechna } x \in I_k^* \text{ a všechna } k \in \mathbb{Z}$$

zřejmě spojitá v celém $\mathbb{R}$; je přitom funkcí primitivní k f v každém intervalu I_k. Podle V.5.5 a vzhledem ke spojitosti f v $\mathbb{R}$ je kromě toho

$$F'(\tfrac{1}{2}(2k+1)\pi) = \lim_{x\to(2k+1)\pi/2} F'(x) = \lim_{x\to(2k+1)\pi/2} f(x) = f(\tfrac{1}{2}(2k+1)\pi),$$

což dokazuje, že F je funkcí primitivní k f v celém $\mathbb{R}$.

a to na maximálních intervalech $(-\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2})$, $k \in \mathbb{Z}$. ∎

Poznámka. Mohli jsme se též vyhnout rozkládání intervalu J_k na intervaly J_k^-, J_k^+ a bod $\frac{\pi}{2} + k\pi$, kdybychom pro interval J_k užili substituci $\operatorname{cotg} x$. Doporučujeme rozmyslet si to podrobně.

Předchozí příklad s poznámkou jsou ilustrací následující obecnější poučky.

Pokud je $R(u,v) = R(-u,-v)$, lze funkci $R(\sin x, \cos x)$ vyjádřit ve tvaru $Q(\operatorname{tg} x) \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$ (s výjimkou bodů, v nichž funkce tg *není definována) a také ve tvaru $S(\operatorname{cotg} x) \cdot \frac{-1}{\sin^2 x}$ (s výjimkou bodů, v nichž funkce* cotg *není definována), kde Q a S jsou racionální funkce. Substitucí „$y = \operatorname{tg} x$“ či „$y = \operatorname{cotg} x$“ lze tedy převést úlohu hledání primitivní funkce k funkci $R(\sin x, \cos x)$ na hledání primitivní funkce k funkci racionální.*

Protože tyto substituce mohou být aplikovány jen na intervalech definičního oboru funkcí $\operatorname{tg} x$ nebo $\operatorname{cotg} x$, může tento postup vyžadovat dodatečné „lepení“. Vhodnou volbou substituce se mu lze někdy vyhnout.

Následující poučka popisuje substituci, která je univerzálně použitelná pro všechny funkce typu „$R(\sin x, \cos x)$“.

Užití substituce „$y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$“ či „$y = \operatorname{cotg} \frac{x}{2}$“ vede vždy k hledání primitivních funkcí k racionálním funkcím na intervalech, kde lze aplikovat substituční větu.

Rozmyslete si, v čem by byla v předchozích příkladech aplikace těchto substitucí komplikovanější. Doporučujeme si to cvičně provést.

My budeme použití právě uvedených substitucí demonstrovat na vhodnějším příkladu.

Příklad Najděte všechny primitivní funkce k funkci $h(x) = \frac{1}{\sin x + 2}$.

Řešení. Protože funkce není ve tvaru vhodném k aplikaci substitucí „$y = \sin x$“, „$y = \cos x$“, „$y = \operatorname{tg} x$“ ani „$y = \operatorname{cotg} x$“, budeme aplikovat substituci „$y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$“.

Povšimněme si už nyní, že h je spojitá na $\mathbb{R}$, takže k nalezení primitivní funkce na $\mathbb{R}$ zvolenou metodou bude jistě na závěr zapotřebí (nekonečně mnoha) lepení.

Je $h(x) = \frac{2\cos^2 \frac{x}{2}}{\sin x + 2} (\operatorname{tg} \frac{x}{2})'$ na intervalech $I_k = (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Abychom vyjádřili h v potřebném tvaru pro použití 1. substituční věty s $f(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ uvážíme, že

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1}$$

a

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1}$$

na I_k. Po dosazení dostaneme

$$\int h(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}y}{y+y^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}y}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(y+\frac{1}{2}\right)\right)^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{\mathrm{d}z}{z^2+1} =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg} z + \mathrm{C} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(y+\frac{1}{2}\right)\right) + \mathrm{C} =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)\right) + \mathrm{C}$$

na intervalu I_k pro každé $k \in \mathbb{Z}$. Každá primitivní funkce H k funkci h na $\mathbb{R}$ je tedy rovna $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)\right) + c_k$ na I_k. Protože je spojitá na $\mathbb{R}$ a platí rovnosti

$$\lim_{x\to(\pi+2k\pi)_-} H(x) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} + c_k \text{ a } \lim_{x\to(\pi+2k\pi)_+} H(x) = -\frac{\pi}{\sqrt{3}} + c_{k+1},$$

musí platit $c_{k+1} = c_k + \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ pro $k \in \mathbb{Z}$. Zvolíme-li např. c_0 libovolně, je H určena jednoznačně.

Konečně tedy máme, že všechny primitivní funkce k h na $\mathbb{R}$ jsou tvaru

$$H(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)\right) + c_0 + \frac{2k\pi}{\sqrt{3}}$$

pro $x \in (-\pi+2k\pi, \pi+2k\pi)$ a $H(\pi+2k\pi) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} + c_0 + \frac{2k\pi}{\sqrt{3}}$, kde $c_0 \in \mathbb{R}$. ■

Poznámka. Pro řešení předchozího příkladu jsme mohli též užít 2. větu o substituci se substitucí „$x = 2\operatorname{arctg} y$“ pro $y \in (-\infty, \infty)$, která odpovídá v jistém smyslu právě užité substituci „$\operatorname{tg}\frac{x}{2}$“. Tím bychom našli primitivní funkci H_0 k zadané funkci h na intervalu $(-\pi, \pi)$. Vzhledem k tomu, že h je 2π-periodická, můžeme pak na intervalech $(-\pi+2k\pi, \pi+2k\pi)$ uvažovat funkce $H_k(x) = H_0(x-2k\pi)+c_k$ pro $k \in \mathbb{Z}$, které mají na příslušných intervalech zřejmě derivaci rovnou h. Pak už můžeme postupovat jako v předchozím a spojitým dodefinováním H v krajních bodech intervalů (tedy metodou „lepení“) najít primitivní funkci H k h na celém $\mathbb{R}$.

Úvahu o periodičnosti lze ovšem užít častěji. V řešení předchozího příkladu jsme též mohli užít 1. větu o substituci na substituci „$y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$“ jen na intervalu $(-\pi, \pi)$ a využít periodičnosti tak, jak bylo právě naznačeno.

§7. Další často používané substituce. Domníváme se, že v předchozích odstavcích jsme předvedli všechny podstatné metody užívané při řešení úloh na hledání primitivních funkcí. Nevyčerpali jsme ovšem zdaleka všechny příklady důležitých substitucí, které je třeba ovládat. Zmíníme se nyní již jen stručně o některých z nich. Doporučujeme najít příslušné primitivní funkce v následujících příkladech, ve kterých předvedeme jen část celého postupu.