

14. cvičení

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/>,

Příklady

Najděte primitivní funkce na největším možném intervalu:

1. $f(x) = -\frac{3}{16} \frac{1}{(x^2 + 1)^2}$

Řešení: Integrujeme pomocí substituce $x = \operatorname{tg} t$.

$$\begin{aligned} \int -\frac{3}{16} \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx &= -\frac{3}{16} \int \cos^2 t dt \stackrel{C}{=} -\frac{3}{32} (t + \sin t \cos t) \\ &= -\frac{3}{32} \arctan x - \frac{3}{32} \frac{x}{x^2 + 1} \end{aligned}$$

Jiný postup: Použijeme rekurentní vzorec

$$I_{n+1} = \frac{x}{2n(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n.$$

Tedy $n = 1$ a

$$I_2 = \int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{x}{2(1+x^2)^1} + \frac{2-1}{2} I_1.$$

Protože $I_1 \stackrel{C}{=} \arctan x$, máme

$$\int -\frac{3}{16} \frac{1}{(x^2 + 1)^2} \stackrel{C}{=} -\frac{3}{16} \left(\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \arctan x \right).$$

2. $f(x) = \frac{1}{(x^2 + x + 1)^2}$

Řešení: Výsledný zlomek máme přímo ve tvaru rozkladu na parciální zlomky, budeme tedy přímo počítat integrál. Provedeme jej převedením jmenovatele na čtverec a goniometrickou substitucí.

$$\int \frac{1}{(x^2 + x + 1)^2} dx = \int \frac{1}{[(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}]^2} dx = \frac{16}{9} \int \frac{1}{[(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2 + 1]^2} dx =$$

Nyní použijeme substituci $\frac{2x+1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg} t$ a dostaneme, že

$$\begin{aligned} &= \frac{16}{9} \frac{\sqrt{3}}{2} \int \frac{1}{(\operatorname{tg}^2 t + 1)^2} \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{8\sqrt{3}}{9} \int \cos^2 t dt \stackrel{C}{=} \frac{4\sqrt{3}}{9} (t + \sin t \cos t) \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{9} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{4\sqrt{3}}{9} \frac{2x+1}{\sqrt{(2x+1)^2 + (\sqrt{3})^2}} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{(2x+1)^2 + (\sqrt{3})^2}} \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{9} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \frac{2x+1}{x^2 + x + 1} \end{aligned}$$

Jiný postup: Převědeme na čtverec

$$\int \frac{1}{(x^2 + x + 1)^2} dx = \int \frac{1}{[(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}]^2} dx = \frac{16}{9} \int \frac{1}{[(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2 + 1]^2} dx$$

a použijeme lineární substituci $\frac{2x+1}{\sqrt{3}} = y$. Pak $\frac{2}{\sqrt{3}} dx = dy$ a dostaneme

$$\frac{16}{9} \int \frac{1}{[(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2 + 1]^2} dx = \frac{16}{9} \int \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{[y^2 + 1]^2} dy.$$

Použijeme rekurentní vzorec jako v předchozím příkladě:

$$\frac{16}{9} \int \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{[y^2 + 1]^2} dy \stackrel{C}{=} \frac{8}{3\sqrt{3}} \left(\frac{y}{2(1+y^2)} + \frac{1}{2} \arctan y \right)$$

Vrátíme substituci

$$\begin{aligned} \frac{8}{3\sqrt{3}} \left(\frac{y}{2(1+y^2)} + \frac{1}{2} \arctan y \right) &= \frac{8}{3\sqrt{3}} \left(\frac{\frac{2x+1}{\sqrt{3}}}{2(1+(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2)} + \frac{1}{2} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) \\ &= \frac{1}{3} \frac{2x+1}{1+x+x^2} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

3. $f(x) = \frac{x^2}{(x^2 + 2x + 2)^2}$

Řešení:

Hledejme rozklad ve tvaru

$$\frac{x^2}{(x^2 + 2x + 2)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2x + 2} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 2x + 2)^2}$$

Přenásobením jmenovatelem a roznásobením dostaneme

$$x^2 = (Ax + B)(x^2 + 2x + 2) + (Cx + D)$$

$$x^2 = Ax^3 + 2Ax^2 + 2Ax + Bx^2 + 2Bx + 2B + Cx + D$$

odkud vyplývá, že $A = 0$, $B = 1$, $C = -2$ a $D = -2$. Hledaný rozklad má tvar

$$\frac{x^2}{(x^2 + 2x + 2)^2} = \frac{1}{x^2 + 2x + 2} - \frac{2x + 2}{(x^2 + 2x + 2)^2}$$

Platí, že

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx = \int \frac{1}{(x+1)^2 + 1} dx \stackrel{C}{=} \arctan(x+1)$$

a

$$- \int \frac{2x+2}{(x^2+2x+2)^2} dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{x^2+2x+2}$$

odkud máme, že

$$\int \frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2} dx = \arctan(x+1) + \frac{1}{x^2+2x+2}$$

4. $f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^3}$

Řešení: Zlomek již máme připraven ve tvaru vhodném k integraci. Použijeme substituci $x = \operatorname{tg} t$. Dostaneme, že

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x^2+1)^3} dx &= \int \frac{1}{(\operatorname{tg}^2 t + 1)^3} \frac{dt}{\cos^2 t} = \int \cos^4 t dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2} \frac{1+\cos 2t}{2} dt \\ &= \frac{1}{4} \int (1+2\cos 2t + \cos^2 2t) dt = \frac{1}{4} \int \left(1+2\cos 2t + \frac{1+\cos 4t}{2} \right) dt \\ &= \frac{1}{8} \int (3+4\cos 2t + \cos 4t) dt \stackrel{C}{=} \frac{3}{8}t + \frac{1}{4}\sin 2t + \frac{1}{32}\sin 4t \\ &= \frac{3}{8}t + \frac{1}{2}\sin t \cos t + \frac{1}{16}\sin 2t(2\cos^2 t - 1) \\ &= \frac{3}{8}\arctan x + \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{16}\frac{x}{x^2+1} \left(\frac{2}{x^2+1} - 1 \right) \\ &= \frac{3}{8}\arctan x + \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{8}\frac{x(1-x^2)}{(x^2+1)^2} = \frac{3}{8}\arctan x + \frac{1}{8}\frac{3x^3+5x}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

5. $f(x) = \frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}$

Řešení: Rozklad na parciální zlomky hledáme ve tvaru

$$\frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+x+1)^2}$$

Přenásobením jmenovatelem dostaneme vztah

$$x^2+3x-2 = A(x^2+x+1)^2 + (Bx+C)(x^2+x+1)(x-1) + (Dx+E)(x-1)$$

Roznásobením pravé strany máme

$$x^2+3x-2 = A-C-E+2Ax-Bx-Dx+Ex+3Ax^2+Dx^2+2Ax^3+Cx^3+Ax^4+Bx^4$$

odkud porovnáním koeficientů dostaneme, že

$$A = \frac{2}{9}, \quad B = -\frac{2}{9}, \quad C = -\frac{4}{9}, \quad D = \frac{1}{3}, \quad E = \frac{8}{3}$$

Hledaný rozklad má tedy tvar

$$\frac{x^2 + 3x - 2}{(x-1)(x^2+x+1)^2} = \frac{2}{9} \frac{1}{x-1} - \frac{2}{9} \frac{x+2}{x^2+x+1} + \frac{1}{3} \frac{x+8}{(x^2+x+1)^2}$$

Jednotlivé zlomky budeme integrovat zvlášť. Platí, že

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{9} \frac{1}{x-1} dx &\stackrel{C}{=} \frac{2}{9} \ln|x-1| \\ -\frac{2}{9} \int \frac{x+2}{x^2+x+1} dx &= -\frac{1}{9} \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{x^2+x+1} dx \stackrel{C}{=} \\ &\stackrel{C}{=} -\frac{1}{9} \ln(x^2+x+1) - \frac{2}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

a nakonec

$$\frac{1}{3} \int \frac{x+8}{(x^2+x+1)^2} dx = \frac{1}{6} \int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} dx + \frac{5}{2} \int \frac{1}{(x^2+x+1)^2} dx \stackrel{C}{=}$$

(Druhý integrál počítáme převedením jmenovatele na kanonický tvar $(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}[(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2 + 1]$ a substitucí $\frac{2x+1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg} t$.)

$$\stackrel{C}{=} \frac{-1}{6} \frac{1}{x^2+x+1} + \frac{5}{6} \frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{10}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

Dohromady dostaneme po úpravě

$$\int \frac{x^2 + 3x - 2}{(x-1)(x^2+x+1)^2} dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{3} \frac{5x+2}{x^2+x+1} + \frac{8}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{9} \ln \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}$$

6. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{(x^4 + x^2 + 1)^2}$

Řešení: Jmenovatel lze rozložit na součin kvadratických trojčlenů

$$(x^4 + x^2 + 1)^2 = (x^2 + x + 1)^2(x^2 - x + 1)^2$$

Z toho vyplývá, že rozklad na parciální zlomky hledáme ve tvaru

$$\frac{x^2 + 1}{(x^4 + x^2 + 1)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + x + 1} + \frac{Cx + D}{(x^2 + x + 1)^2} + \frac{Kx + L}{x^2 - x + 1} + \frac{Mx + N}{(x^2 - x + 1)^2}$$

Například metodou neurčitých koeficientů dostaneme, že

$$A = B = C = D = L = N = \frac{1}{4}, \quad K = M = -\frac{1}{4}$$

Integrací jednotlivých zlomků dostaneme po úpravách

$$\int \frac{1}{4} \frac{x+1}{x^2+x+1} dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{4\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{8} \ln(x^2+x+1)$$

$$\int \frac{1}{4} \frac{x+1}{(x^2+x+1)^2} dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{6\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{12} \frac{x-1}{x^2+x+1}$$

$$\int -\frac{1}{4} \frac{x-1}{x^2-x+1} dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{4\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{8} \ln(x^2-x+1)$$

$$\int -\frac{1}{4} \frac{x-1}{(x^2-x+1)^2} dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{6\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{12} \frac{x+1}{x^2-x+1}$$

Sečtením a úpravami dostaneme, že

$$\int \frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2} dx$$

$$\stackrel{C}{=} \frac{5}{12\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{5}{12\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{8} \ln \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} - \frac{1}{6} \frac{2x^2+1}{x^4+x^2+1}$$

7. $f(x) = \frac{1}{(x^3+1)^2}$

Řešení: Platí, že

$$x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$$

Rozklad tedy musíme hledat ve tvaru

$$\frac{1}{(x^3+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1} + \frac{Ex+F}{(x^2-x+1)^2}$$

Přenásobením jmenovatelem dostaneme

$$1 = A(x+1)(x^2-x+1)^2 + B(x^2-x+1)^2$$

$$+ (Cx+D)(x+1)^2(x^2-x+1) + (Ex+F)(x^2-x+1)^2$$

Roznásobením pravé strany máme

$$1 = A+B+D+F - Ax - 2Bx + Cx + Dx + 2Fx + Ex + Ax^2 + 3Bx^2 + Cx^2 + Fx^2 + 2Ex^2 +$$

$$+ Ax^3 - 2Bx^3 + Dx^3 + Ex^3 - Ax^4 + Bx^4 + Cx^4 + Dx^4 + Ax^5 + Cx^5$$

odkud sestavíme porovnáním koeficientů soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 1 &= A + B + D + F \\ 0 &= -A - 2B + C + D + E + 2F \\ 0 &= A + 3B + C + F + 2E \\ 0 &= A - 2B + D + E \\ 0 &= -A + B + C + D \\ 0 &= A + C \end{aligned}$$

jejíž řešení je

$$A = \frac{2}{9}, B = \frac{1}{9}, C = -\frac{2}{9}, D = \frac{1}{3}, E = -\frac{1}{3}, F = \frac{1}{3}$$

a hledaný rozklad tedy má tvar

$$\frac{1}{(x^3+1)^2} = \frac{2}{9} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{9} \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{9} \frac{2x-3}{x^2-x+1} - \frac{1}{3} \frac{x-1}{(x^2-x+1)^2}$$

Budeme integrovat zvlášť jednotlivé zlomky. Platí, že

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{9} \frac{1}{x+1} dx &\stackrel{C}{=} \frac{2}{9} \ln|x+1| \\ \int \frac{1}{9} \frac{1}{(x+1)^2} dx &\stackrel{C}{=} -\frac{1}{9} \frac{1}{x+1} \\ \int \frac{1}{9} \frac{2x-3}{x^2-x+1} dx &= \int \frac{1}{9} \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx - \int \frac{2}{9} \frac{1}{x^2-x+1} dx \\ &\stackrel{C}{=} \frac{1}{9} \ln(x^2-x+1) - \frac{4}{9\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

a nakonec

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{3} \frac{x-1}{(x^2-x+1)^2} dx &= \int \frac{1}{6} \frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2} dx - \int \frac{1}{6} \frac{1}{(x^2-x+1)^2} dx = \\ &= -\frac{1}{6} \frac{1}{x^2-x+1} - \int \frac{1}{6} \frac{1}{(x^2-x+1)^2} dx \end{aligned}$$

Zbýlý integrál vypočteme takto:

$$\int \frac{1}{6} \frac{1}{(x^2-x+1)^2} dx = \int \frac{1}{6} \frac{16}{9} \frac{1}{\left[\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right]^2} dx =$$

nyň aplikujeme substituci $\operatorname{tg} t = \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$, přičemž máme, že $\frac{1}{\cos^2 t} dt = \frac{2}{\sqrt{3}} dx$, a proto

$$\begin{aligned} &= \int \frac{1}{6} \frac{8}{3\sqrt{3}} \frac{1}{(\operatorname{tg}^2 t + 1)^2} \frac{1}{\cos^2 t} dt = \int \frac{4}{9\sqrt{3}} \cos^4 t \frac{1}{\cos^2 t} dt = \int \frac{4}{9\sqrt{3}} \cos^2 t dt \\ &\stackrel{C}{=} \frac{4}{9\sqrt{3}} \frac{t + \sin t \cos t}{2} = \frac{2}{9\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{9\sqrt{3}} \frac{2x-1}{\sqrt{(2x-1)^2+3}} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{(2x-1)^2+3}} \\ &= \frac{2}{9\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{18} \frac{(2x-1)}{x^2-x+1} \end{aligned}$$

Dáme-li jednotlivé výsledky dohromady, dostáváme

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x^3+1)^2} dx &\stackrel{C}{=} \frac{1}{9} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} - \frac{1}{9(x+1)} + \frac{2}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{9} \frac{x+1}{x^2-x+1} = \\ &= \frac{1}{9} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{2}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \frac{x}{x^3+1} \end{aligned}$$

$$8. f(x) = \frac{x^9}{(x^{10} + 2x^5 + 2)^2}.$$

Řešení:

Provedme substituci $t = x^5$.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^9}{(x^{10} + 2x^5 + 2)^2} dx &= \frac{1}{5} \int \frac{t}{(t^2 + 2t + 2)^2} dt = \frac{1}{10} \int \frac{2t}{(t+1)^2 + 1} dt = \\ &= \frac{1}{10} \int \frac{2t+2-2}{((t+1)^2 + 1)^2} dt = \frac{1}{10} \int \frac{2t+2}{((t+1)^2 + 1)^2} dt - \frac{1}{5} \int \frac{1}{((t+1)^2 + 1)^2} dt = \end{aligned}$$

Na první integrál použijeme substituci $u = (t+1)^2 + 1$, na druhý $t+1 = \operatorname{tg} y$ a s přihlédnutím ke vztahům

$$\frac{1}{\operatorname{tg}^2 y + 1} = \cos^2 y, \quad dt = \frac{1}{\cos^2 y} dy$$

dostaneme, že

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{10} \int \frac{du}{u^2} - \frac{1}{5} \int \cos^2 y dy \stackrel{C}{=} -\frac{1}{10} \frac{1}{u} - \frac{1}{5} \frac{y + \sin y \cos y}{2} = \\ &= -\frac{1}{10} \frac{1}{(t+1)^2 + 1} - \frac{1}{10} y - \frac{1}{10} \operatorname{tg} y \cos^2 y = \\ &= -\frac{1}{10} \frac{1}{t^2 + 2t + 2} - \frac{1}{10} \arctan(t+1) - \frac{1}{10} \frac{\operatorname{tg} y}{\operatorname{tg}^2 y + 1} = \\ &= -\frac{1}{10} \frac{1}{x^{10} + 2x^5 + 2} - \frac{1}{10} \arctan(x^5 + 1) - \frac{1}{10} \frac{x^5 + 1}{x^{10} + 2x^5 + 2} = \\ &= -\frac{1}{10} \frac{x^5 + 2}{x^{10} + 2x^5 + 2} - \frac{1}{10} \arctan(x^5 + 1). \end{aligned}$$