



14. cvičení - Parciální zlomky 2

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Per partes

Označme

$$I_n := \int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$$

Pak

$$I_1 \stackrel{C}{=} \arctan x$$
$$I_{n+1} = \frac{x}{2n(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n$$

Substituce

Pro substituci $x = \operatorname{tg} t$ platí vztahy:

$$t = \arctan x \quad \sin^2 t = \frac{x^2}{1+x^2}, \quad \cos^2 t = \frac{1}{1+x^2}, \quad \sin t \cos t = \frac{x}{1+x^2} \quad (1)$$

Tedy

$$I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx = \int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = \int (\cos^2 t)^{n-1} dt$$

Příklady

Určete primitivní funkci k daným funkcím:

1. $f(x) = -\frac{3}{16} \frac{1}{(x^2+1)^2}$

5. $f(x) = \frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}$

2. $f(x) = \frac{1}{(x^2+x+1)^2}$

6. $\otimes f(x) = \frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2}$

3. $f(x) = \frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}$

7. $f(x) = \frac{1}{(x^3+1)^2}$

4. $f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^3}$

8. $\ast f(x) = \frac{x^9}{(x^{10}+2x^5+2)^2}$

(9) pro rozklad hledejte $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$, roznásobte a porovnávejte člen po členu
(8) substituce $t = x^2$