

### 13. cvičení

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/>,

#### Příklady

Určete primitivní funkci k daným funkcím:

1.  $f(x) = \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

**Řešení:**

Budeme hledat rozklad ve tvaru

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}$$

Přenosobním dostaneme vztah

$$x = A(x+2)(x+3) + B(x+1)(x+3) + C(x+1)(x+2)$$

Dosaďme nyní postupně za  $x = -1, -2, -3$ . Obdržíme tak, že

$$-1 = 2A \implies A = -\frac{1}{2}$$

$$-2 = -B \implies B = 2$$

$$-3 = 2C \implies C = -\frac{3}{2}$$

Odtud tedy vyplývá, že

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} dx &= \int \frac{-1}{2} \frac{1}{x+1} dx + \int \frac{2}{x+2} dx + \int \frac{-3}{2} \frac{1}{x+3} dx \stackrel{C}{=} \\ &\stackrel{C}{=} -\frac{1}{2} \ln|x+1| + 2 \ln|x+2| - \frac{3}{2} \ln|x+3| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(x+2)^4}{(x+1)(x+3)^3} \right| \end{aligned}$$

2.  $f(x) = \frac{x}{x^3-1}$

**Řešení:**

Platí, že  $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$ , přičemž druhý člen již nemá reálné kořeny. Rozklad tedy hledáme ve tvaru

$$\frac{x}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

Přenosobním jmenovatelem dostaneme vztah

$$x = A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x - 1)$$

dosazením  $x = 1$  dostaneme, že  $A = \frac{1}{3}$ . Zpětným dosazením a roznásobením dostaneme, že

$$x = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} + Bx^2 - Bx + Cx - C,$$

odkud vyplývá, že  $C = \frac{1}{3}$  (absolutní členy) a  $B = -\frac{1}{3}$  (koeficienty u  $x^2$ ). Rozklad má tedy tvar

$$\frac{x}{x^3 - 1} = \frac{1}{3} \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{3} \frac{x - 1}{x^2 + x + 1}$$

Platí, že

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{3} \frac{1}{x - 1} dx &\stackrel{C}{=} \frac{1}{3} \ln|x - 1| \\ \int \frac{1}{3} \frac{x - 1}{x^2 + x + 1} dx &= \int \frac{1}{6} \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} dx - \int \frac{1}{2} \frac{1}{x^2 + x + 1} dx - \frac{C}{6} \\ &\quad \frac{1}{6} \ln(x^2 + x + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Odtud vyplývá:

$$\int \frac{x}{x^3 - 1} dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{3} \ln|x - 1| - \frac{1}{6} \ln(x^2 + x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x + 1}{\sqrt{3}}$$

3.  $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x}$

**Řešení:**

Mohli bychom provést dělení, k nalezení prvního kroku rozkladu ale vede snazší cesta

$$\frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} = \frac{(x^3 - 5x^2 + 6x) + 5x^2 - 6x + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} = 1 + \frac{5x^2 - 6x + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} =$$

Nyní už máme na pravé straně podíl polynomů, kde stupeň čitatele je menší než stupeň jmenovatele, a můžeme tedy použít standardní algoritmus. Nejprve rozložíme jmenovatel na kořenové činitele a poté hledáme rozklad ve tvaru

$$= 1 + \frac{5x^2 - 6x + 1}{x(x - 2)(x - 3)} = 1 + \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x - 3}$$

Přenosobením jmenovatelem dostaneme rovnici

$$5x^2 - 6x + 1 = A(x - 2)(x - 3) + Bx(x - 3) + Cx(x - 2)$$

Postupným dosazením  $x = 0$ ,  $x = 2$  a  $x = 3$  dostaneme, že

$$1 = 6A \implies A = \frac{1}{6}$$

$$9 = -2B \implies B = -\frac{9}{2}$$

$$45 - 18 + 1 = 3C \implies C = \frac{28}{3}$$

Odtud vyplývá, že

$$\int \frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} dx = \int \left( 1 + \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3} \right) dx \stackrel{C}{=} x + \frac{1}{6} \ln|x| - \frac{9}{2} \ln|x-2| + \frac{28}{3} \ln|x-3|$$

4.  $f(x) = \frac{x^4}{x^4 + 5x^2 + 4}$

**Řešení:**

Platí, že

$$\frac{x^4}{x^4 + 5x^2 + 4} = \frac{(x^4 + 5x^2 + 4) - 5x^2 - 4}{x^4 + 5x^2 + 4} = 1 - \frac{5x^2 + 4}{x^4 + 5x^2 + 4} = 1 - \frac{5x^2 + 4}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}$$

Obecně bychom měli hledat rozklad ve tvaru

$$\frac{5x^2 + 4}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = \frac{A + Bx}{x^2 + 1} + \frac{C + Dx}{x^2 + 4}$$

zde ale postačí hledat jej ve tvaru

$$\frac{5x^2 + 4}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = \frac{A}{x^2 + 1} + \frac{C}{x^2 + 4}$$

Je to z toho důvodu, že ve zlomku není nikde přítomno  $x$  v první mocnině. Možná bude lépe vidět, proč to funguje, pokud namísto  $x^2$  budeme psát  $t$ .

$$\frac{5t + 4}{(t + 1)(t + 4)} = \frac{A}{t + 1} + \frac{C}{t + 4}$$

Poznamenejme, že jde o substituci do výrazu za účelem hledání rozkladu, nikoliv substituci do integrálu. Substituce nám bude užitečná i v tom, že za  $t$  lze dosazovat záporná čísla, což zjednoduší postup získávání koeficientů  $A, B$ . Každopádně, přenásobením jmenovatelem dostaneme vztah

$$5t + 4 = A(t + 4) + C(t + 1)$$

Dosažením  $t = -4$  a  $t = -1$  dostaneme, že<sup>1</sup>

$$-16 = -3C \implies C = \frac{16}{3}$$

---

<sup>1</sup>) Poznamenejme, že zde hledáme rozklad platný pro **všechna**  $t$  reálná. Pokud by někdo namítl, že  $t = x^2$  a není tedy možné dosazovat záporná čísla, pak na tuto námítku odpovíme, že pokud najdeme obecnější rovnost platnou pro **všechna** reálná čísla, pak jistě platí i pro všechna nezáporná reálná čísla — která již lze psát ve tvaru druhé mocniny  $x$ .

$$-1 = 3A \implies A = -\frac{1}{3}$$

Odtud tedy máme, že

$$\frac{5t+4}{(t+1)(t+4)} = -\frac{1}{3} \frac{1}{t+1} + \frac{16}{3} \frac{1}{t+4}$$

a tedy

$$\frac{5x^2+4}{(x^2+1)(x^2+4)} = -\frac{1}{3} \frac{1}{x^2+1} + \frac{16}{3} \frac{1}{x^2+4}$$

Nyní už můžeme provést integraci.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4} dx &= \int \left( 1 + \frac{1}{3} \frac{1}{x^2+1} - \frac{16}{3} \cdot \frac{1}{4} \frac{1}{(x/2)^2+1} \right) dx \stackrel{C}{=} \\ &\stackrel{C}{=} x + \frac{1}{3} \arctan x - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{1/2} \arctan \frac{x}{2} = x + \frac{1}{3} \arctan x - \frac{8}{3} \arctan \frac{x}{2} \end{aligned}$$

5.  $f(x) = \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}$

**Řešení:**

Rozklad budeme hledat ve tvaru

$$\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1}$$

Přenásobením jmenovatelem dostaneme vztah

$$x^2+1 = A(x-1) + B(x+1)(x-1) + C(x+1)^2$$

Dosazením  $x = 1$  a  $x = -1$  dostaneme, že

$$2 = 4C \implies C = \frac{1}{2}$$

$$2 = -2A \implies A = -1$$

Nyní dosazením např.  $x = 0$  dostaneme, že

$$1 = -A - B + C \implies B = -A + C - 1 = -(-1) + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

Odtud máme:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)} dx &= \int \left( \frac{-1}{(x+1)^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} \right) dx \stackrel{C}{=} \\ &\stackrel{C}{=} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \ln|x+1| + \frac{1}{2} \ln|x-1| = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \ln|x^2-1| \end{aligned}$$

$$6. f(x) = \frac{1}{x(1+x)(1+x+x^2)}$$

**Řešení:** Kvadratický trojčlen  $x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$  nemá reálné kořeny. Proto rozklad na parciální zlomky hledáme ve tvaru

$$\frac{1}{x(1+x)(1+x+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{1+x} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}$$

Přenosobením jmenovatelem dostaneme vztah

$$1 = A(1+x)(1+x+x^2) + Bx(1+x+x^2) + (Cx+D)x(x+1)$$

Dosazením  $x = 0$  dostaneme, že  $A = 1$ . Dosazením  $x = -1$  dostaneme, že  $B = -1$ . Po dosazení a roznásobení dostaneme

$$1 = (1+x)(1+x+x^2) - x(1+x+x^2) + (Cx+D)x(x+1)$$

$$1 = 1 + x + x^2 + Cx^3 + Cx^2 + Dx^2 + Dx$$

odkud vyplývá, že  $D = -1$  a  $C = 0$ . Rozklad má tvar

$$\frac{1}{x(1+x)(1+x+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{x^2+x+1}$$

Integrací dostáváme

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x(1+x)(1+x+x^2)} dx &= \ln|x| - \ln|1+x| - \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dx \stackrel{C}{=} \\ &\stackrel{C}{=} \ln \left| \frac{x}{1+x} \right| - \sqrt{\frac{4}{3}} \arctan \frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \ln \left| \frac{x}{1+x} \right| - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$7. f(x) = \left( \frac{x}{x^2 - 3x + 2} \right)^2$$

**Řešení:**

Nejprve najdeme rozklad jmenovatele. Platí, že

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$$

Hledáme tedy rozklad výrazu

$$\frac{x^2}{(x-1)^2(x-2)^2}$$

Ten je potřeba obecně hledat ve tvaru

$$\frac{x^2}{(x-1)^2(x-2)^2} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-2)^2} + \frac{D}{x-2}$$

Přenosobením jmenovatelem dostaneme vztah

$$x^2 = A(x-2)^2 + B(x-1)(x-2)^2 + C(x-1)^2 + D(x-2)(x-1)^2$$

Dosazením  $x = 1$  a  $x = 2$  dostaneme, že

$$1 = A, \quad 4 = C$$

Zbylé koeficienty  $B, D$  určíme dosazením dvou libovolných hodnot, třeba  $x = 0$  a  $x = 3$ . Dostaneme, že

$$0 = 4A - 4B + C - 2D = 4 - 4B + 4 - 2D \implies -8 = -4B - 2D$$

$$9 = A + 2B + 4C + 4D = 1 + 2B + 16 + 4D \implies -8 = 2B + 4D$$

Odtud snadno vyplývá, že  $D = -4$  a  $B = 4$ . Odtud vyplývá:

$$\begin{aligned} \int \left( \frac{x}{x^2 - 3x + 2} \right)^2 dx &= \int \left( \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{4}{x-1} + \frac{4}{(x-2)^2} - \frac{4}{x-2} \right) dx \stackrel{C}{=} \\ &\stackrel{C}{=} -\frac{1}{x-1} + 4 \ln|x-1| - \frac{4}{x-2} - 4 \ln|x-2| = -\frac{x-2+4(x-1)}{(x-1)(x-2)} + 4 \ln \left| \frac{x-1}{x-2} \right| = \\ &\quad -\frac{5x-6}{x^2-3x+2} + 4 \ln \left| \frac{x-1}{x-2} \right| \end{aligned}$$

8.  $f(x) = \frac{1}{x^3+1}$

**Řešení:**

Platí, že  $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1) = (x+1)\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right)$ . Druhý kvadratický trojčlen tedy nemá reálné kořeny, rozklad tedy hledáme ve tvaru

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

Přenosobením jmenovatelem dostaneme vztah

$$1 = A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x + 1)$$

dosazením  $x = -1$  dostaneme, že  $A = \frac{1}{3}$ . Roznásobením pak dostaneme

$$1 = \frac{1}{3}(x^2 - x + 1) + Bx^2 + Bx + Cx + C$$

odkud ihned vyplývá, že  $C = \frac{2}{3}$  (porovnání koeficientů absolutních členů) a  $B = -\frac{1}{3}$  (porovnání koeficientů u druhé mocniny  $x$ ). Rozklad má tedy tvar

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3} \frac{1}{x+1} - \frac{1}{3} \frac{x-2}{x^2-x+1}$$

Platí, že

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{3x+1} dx &\stackrel{C}{=} \frac{1}{3} \ln|x+1| \\ \int \frac{1}{3} \frac{x-2}{x^2-x+1} dx &= \int \frac{1}{6} \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx - \int \frac{1}{2} \frac{1}{x^2-x+1} dx \stackrel{C}{=} \\ &\stackrel{C}{=} \frac{1}{6} \ln(x^2-x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

Odkud vyplývá, že

$$\int \frac{1}{x^3+1} dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$