12. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/

Příklady

Určete primitivní funkci k daným funkcím:

1. Goniometrické substituce

   (a) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$

   Řešení: Zvolme substituci $x = 2\cos t$. Pak $\mathrm{d}x = -2\sin t\,\mathrm{d}t$ a $4 - x^2 = 4(1-\cos^2 t) = 4\sin^2 t$. Intervaly budou: $t \in (0,\pi)$, pak $x \in (-2,2)$. Navíc $-2\sin t \neq 0$ na $(0,\pi)$ a funkce $2\cos t$, $t \in (0,\pi)$ je na (surjekce). Dostáváme

   $$\int \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{4\sin^2 t}(-2\sin t)\,\mathrm{d}t = \int -4|\sin t|\sin t\,\mathrm{d}t$$

   Protože jsme na intervalu $(0,\pi)$, tak $|\sin t| = \sin t$ a

   $$\int -4|\sin t|\sin t\,\mathrm{d}t = -4\int \sin^2 t\,\mathrm{d}t.$$

   Poslední integrál lze vyřešit dvěma per partes nebo přepisem $\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}$. Pak

   $$-4\int \sin^2 t\,\mathrm{d}t = -4\int \frac{1-\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t = -4\left(\frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4}\right) + c$$

   Celkem tedy pro $x \in (-2,2)$ máme

   $$\int \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x = -4\left(\frac{\arccos(x/2)}{2} - \frac{\sin(2\arccos(x/2))}{4}\right) + c$$

   (b) $f(x) = \dfrac{1}{(1-x^2)^{3/2}}$

   Řešení: Definiční obor funkce f je interval $(-1,1)$, stačí tedy určit primitivní funkci na tomto intervalu. Provedeme substituci $x = \sin t$. Protože $x \in (-1,1)$, je $t \in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$. Potom

   $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = (\sin t)' = \cos t \implies \mathrm{d}x = \cos t\ \mathrm{d}t,$$

   a protože $\cos t > 0$ pro $t \in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, podle druhé věty o substituci máme

   $$\int \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{(1-\sin^2 t)^{3/2}}\cos t\ \mathrm{d}t = \int \frac{1}{\cos^3 t}\cos t\ \mathrm{d}t = \int \frac{1}{\cos^2 t} \stackrel{C}{=} \tan t$$

   a s přihlédnutím k tomu, že pro $t \in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ je $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t}$, dostaneme

   $$= \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

(c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}$

Řešení: Je vidět, že $x \in (-a, a)$. Použijeme substituci $x = a\sin t$. Potom

$$\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\ \mathrm{d}x = \int a\sqrt{\frac{1+\sin t}{1-\sin t}}\ \cos t\ \mathrm{d}t = \int a\sqrt{\frac{(1+\sin t)^2}{1-\sin^2 t}}\ \cos t\ \mathrm{d}t =$$

$$= \int a(1+\sin t)\ \mathrm{d}t \stackrel{C}{=} at - a\cos t = a\arcsin\frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2}$$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+a^2)^{3/2}}$

Řešení: Lze použít substituci $a\sinh t$, ale ukážeme si jiný postup, použijeme substituci $x = a\,\mathrm{tg}\,t$. Potom $\mathrm{d}x = \frac{a}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$ a s přihlédnutím ke vztahu $\mathrm{tg}^2\,t + 1 = \frac{1}{\cos^2 t}$ platí

$$\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{3/2}}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{a^3\cdot(\mathrm{tg}^2\,t+1)^{3/2}}\,\frac{a}{\cos^2 t}\ \mathrm{d}t$$

$$= \int \frac{1}{a^2}\ \cos t\ \mathrm{d}t \stackrel{C}{=} \frac{1}{a^2}\sin t = \frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}},$$

přičemž poslední vztah plyne z výpočtu

$$\mathrm{tg}^2\,t = \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{\sin^2 t}{1-\sin^2 t} \implies \sin^2 t = \frac{\mathrm{tg}^2\,t}{1+\mathrm{tg}^2\,t} \implies \sin t = \frac{\mathrm{tg}\,t}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,t}}.$$

2. Hyperbolické:

(a) $f(x) = \sqrt{a^2+x^2}$

Řešení: Použijeme substituci $x = a\sinh t$. Potom $\mathrm{d}x = a\cosh t\ \mathrm{d}t$ a platí

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\ \mathrm{d}x = \int a^2\cosh^2 t\ \mathrm{d}t \stackrel{C}{=} \frac{a^2}{2}\,(t+\cosh t\sinh t) =$$

$$= \frac{1}{2}a^2\operatorname{arg\,sinh}\frac{x}{a} + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2+x^2} \stackrel{C}{=} \frac{1}{2}a^2\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2+x^2}$$

(b) $f(x) = \sqrt{x^2-a^2}$

Řešení:

Použijeme substituci $x = a\cosh t$. Potom $\mathrm{d}x = a\sinh t\ \mathrm{d}t$ a platí

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\ \mathrm{d}x = \int a^2\sinh^2 t\ \mathrm{d}t \stackrel{C}{=} \frac{a^2}{2}\,(\cosh t\sinh t - t) =$$

$$= -\frac{1}{2}a^2\operatorname{arg\,cosh}\frac{x}{a} + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2}.$$

Lze také psát

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\ \mathrm{d}x \stackrel{C}{=} -\frac{1}{2}a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2}.$$

(c) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-2}}$

Řešení: Provedeme substituci $x = \sqrt{2}\cosh t$. Potom $\mathrm{d}x = \sqrt{2}\sinh t\ \mathrm{d}t$ a platí

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-2}}\ \mathrm{d}x = \int \frac{2\cosh^2 t}{\sqrt{2}\sinh t}\sqrt{2}\sinh t\ \mathrm{d}t = \int 2\cosh^2 t\ \mathrm{d}t \overset{C}{=} (t + \sinh t\cosh t) =$$

$$= \operatorname{arg\,sinh}\frac{x}{2} + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-2} \overset{C}{=} \ln\left(x + \sqrt{x^2-2}\right) + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-2}$$

(d) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}$

Řešení: Použijeme substituci $x = a\sinh t$. Potom $\mathrm{d}x = a\cosh t\ \mathrm{d}t$ a platí

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\ \mathrm{d}x = \int \frac{a^2\sinh^2 t}{a\cosh t}a\cosh t\ \mathrm{d}t = a^2\int \sinh^2 t\ \mathrm{d}t \overset{C}{=} \frac{a^2}{2}\left[t - \sinh t\cosh t\right] =$$

$$= \frac{a^2}{2}\operatorname{arg\,sinh}\frac{x}{a} - \frac{1}{2}x\sqrt{a^2+x^2} \overset{C}{=} \frac{1}{2}a^2\ln\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right) + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2+x^2}$$

3. Směs

(a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+e^x}}$

Řešení: Použijeme substituci $y = \sqrt{1+e^x}$. Pak $e^x = y^2-1$, tedy $x = \ln(y^2-1)$. Dopočteme $\mathrm{d}x = \frac{2y}{y^2-1}\,\mathrm{d}y$. Odtud máme

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{y}\frac{2y}{y^2-1}\ \mathrm{d}y = 2\int \frac{1}{y^2-1}\ \mathrm{d}y \overset{C}{=} \ln\left|\frac{1-y}{1+y}\right| = \ln\left|\frac{1-\sqrt{1+e^x}}{1+\sqrt{1+e^x}}\right|$$

(b) $f(x) = \dfrac{5}{\sqrt{4x-7}+3}$

Řešení: Substituce $y = \sqrt{4x-7}$. Pak $(y^2+7)/4 = x$ a $y/2\,\mathrm{d}y = dx$. Pak

$$\int \frac{5}{\sqrt{4x-7}+3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{5}{y+3}\frac{y}{2}\,\mathrm{d}y = \frac{5}{2}\int \frac{y}{y+3}\,\mathrm{d}y = \frac{5}{2}\int 1 - \frac{3}{y+3}\,\mathrm{d}y =$$
$$\frac{5}{2}(y - 3\ln|y+3|) + c = \frac{5}{2}(\sqrt{4x-7} - 3\ln|\sqrt{4x-7}+3|) + c$$

(c) $f(x) = \sin\sqrt{x}$

Řešení: Zvolme substituci $y = \sqrt{x}$. Pak $y^2 = x$ a $2y\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$. Potom

$$\int \sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int 2y\sin y\ \mathrm{d}y$$

Tento integrál vyřešíme pomocí per partes, zvolíme $v = 2y$, $u' = \sin y$. Pak $v' = 2$, $u = -\cos y$. Máme

$$\int 2y \sin y \; \mathrm{d}y = -2y \cos y + 2 \int \cos y \, \mathrm{d}y = -2y \cos y + 2 \sin y + c$$

Zpětně zasubstituujeme a dostaneme

$$\int \sin \sqrt{x} \, \mathrm{d}x = -2\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + 2 \sin \sqrt{x} + c.$$

(d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[3]{x}}$

Řešení: Zvolme substituci $y = \sqrt[6]{x}$. Pak $y^6 = x$ a $6y^5 \, \mathrm{d}y = \, \mathrm{d}x$. Máme

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} \, \mathrm{d}x = \int \frac{y^3}{1 + y^2} 6y^5 \, \mathrm{d}y = 6 \int \frac{y^8}{1 + y^2} \, \mathrm{d}y =$$

Provedeme dělení mnohočlenů a získáme

$$6 \int \frac{y^8}{1 + y^2} \, \mathrm{d}y = 6 \int y^6 - y^4 + y^2 - 1 + \frac{1}{1 + y^2} \, \mathrm{d}y = 6 \left(\frac{y^7}{7} - \frac{y^5}{5} + \frac{y^3}{3} - y + \arctan y \right) + c$$

Vrátíme substituci:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} \, \mathrm{d}x = 6 \left(\frac{x^{7/6}}{7} - \frac{x^{5/6}}{5} + \frac{x^{1/2}}{3} - x^{1/6} + \arctan x^{1/6} \right) + c$$