9. cvičení

Teorie

Věta 1 (první věta o substituci)**.** Nechť $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $\alpha < \beta$. Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b). Nechť φ je funkce definovaná na intervalu (α, β) s hodnotami v (a, b), která má v každém bodě (α, β) vlastní derivaci. Pak

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \overset{C}{=} F(\varphi(t)), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Věta 2 (Integrace per partes)**.** Nechť I je neprázdný otevřený interval a funkce f je spojitá na I. Nechť F je primitivní funkce k f na I a G je primitivní funkce ke g na I. Pak platí

$$\int g(x)F(x)\,\mathrm{d}x = G(x)F(x) - \int G(x)f(x)\,\mathrm{d}x \text{ na } I.$$

	u(x)	v'(x)
$P(x) \cdot e^{kx}$	$P(x)$	e^{kx}
$P(x) \cdot a^{kx}$	$P(x)$	a^{kx}
$P(x) \cdot \sin(kx)$	$P(x)$	$\sin(kx)$
$P(x) \cdot \cos(kx)$	$P(x)$	$\cos(kx)$

	u(x)	v'(x)
$P(x) \cdot \ln^n x$	$\ln^n x$	$P(x)$
$P(x) \cdot \arcsin\,(kx)$	$\arcsin\,(kx)$	$P(x)$
$P(x) \cdot \arccos\,(kx)$	$\arccos\,(kx)$	$P(x)$
$P(x) \cdot \arctan\,(kx)$	$\arctan\,(kx)$	$P(x)$
$P(x) \cdot \mathrm{arcctg}\,(kx)$	$\mathrm{arcctg}\,(kx)$	$P(x)$

Příklady

Určete primitivní funkci k funkci $f(x)$ na otevřené podmnožině jejího definičního oboru, kde primitivní funkce existuje.

1. Směs II

   (a) $\displaystyle\int \arctan x\,\mathrm{d}x$

   Řešení:

   Per partes: $u' = 1$, $u = x$, $v = \arctan x$, $v' = \frac{1}{1+x^2}$.

   $$\int 1 \cdot \arctan x\,dx = [x\arctan x] - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx =$$

   Substituce $y = 1 + x^2$.

   $$= x\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{y}\,dy \overset{C}{=} x\arctan x - \frac{1}{2}\ln|y| = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

   (b) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme substituci $y = \sin x$. Potom $dy = \cos x \, dx$ a platí

$$\int \frac{1}{\cos x}\, dx = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}\, dx = \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\, dx = \int \frac{dy}{1-y^2} \stackrel{C}{=} \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+y}{1-y} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right| = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right|$$

Funkce $\frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}$ je definována na $(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Na těchto intervalech tedy má smysl hledat primitivní funkci. Jeden z nich zafixujeme.

Pro substituci máme $\varphi = \sin x$, interval $(\alpha, \beta) = (-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Platí $\sin((\alpha,\beta)) = (-1,1)$.

Funkce $f = \frac{1}{1-y^2}$ má primitivní funkci speciálně na intervalu $(a,b) = (-1,1)$. Protože $\sin((\alpha,\beta)) \subseteq (a,b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha,\beta)$. Protože takhle můžeme zafixovat interval pro každé k, dostáváme celkem $x \in (-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

(c) $\displaystyle\int \operatorname{cotg} x \, \mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme substituci $y = \sin x$. Potom $dy = \cos x \, dx$ a platí

$$\int \operatorname{cotg} x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx = \int \frac{dy}{y} \stackrel{C}{=} \ln|y| = \ln|\sin x|$$

Funkce $\cot x$ je definována na $(0+k\pi, \pi+k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Na těchto intervalech tedy má smysl hledat primitivní funkci. Jeden z nich zafixujeme.

Pro substituci máme $\varphi = \sin x$, interval $(\alpha,\beta) = (0+k\pi, \pi+k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Platí $\sin((\alpha,\beta)) = (0,1]$ (nebo $[-1,0)$).

Funkce $f = \frac{1}{y}$ má primitivní funkci na intervalu $(a,b) = (0,\infty)$ (nebo $(-\infty,0)$). Protože $\sin((\alpha,\beta)) \subseteq (a,b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha,\beta)$. Protože takhle můžeme zafixovat interval pro každé k, dostáváme celkem $x \in (0+k\pi, \pi+k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

(d) $\displaystyle\int x \ln \frac{1+x}{1-x}\, \mathrm{d}x$

Řešení: Per partes: $u' = x$, $u = \frac{x^2}{2}$, $v = \ln\frac{1+x}{1-x}$, $v' = \frac{2}{1-x^2}$.

$$\int x \ln \frac{1+x}{1-x}\, dx = \frac{1}{2}x^2 \ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{\cancel{2}} \int \frac{x^2}{1-x^2}\, dx = \frac{1}{2}x^2 \ln\frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{\cancel{2}} \int \frac{x^2-1+1}{1-x^2}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln\frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{\cancel{2}} \int \left(-1 + \frac{1}{1-x^2} \right) dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{2}x^2 \ln\frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{\cancel{2}} x \frac{1}{4} \ln\frac{1+x}{1-x}$$

(e) $\displaystyle\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}}\, \mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme substituce $y = \sin x - \cos x$. Potom $dy = \cos x + \sin x$ a platí

$$\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}}\, dx = \int \frac{dy}{y^{1/3}} \stackrel{C}{=} \frac{3}{2} y^{2/3} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{(\sin x - \cos x)^2} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{1 - \sin 2x}$$

Funkce $\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}}$ je definována na $(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{5\pi}{4} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Na těchto intervalech tedy má smysl hledat primitivní funkci. Jeden z nich zafixujeme. Pro substituci máme $\varphi = \sin x - \cos x$, interval $(\alpha, \beta) = (\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{5\pi}{4} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Platí $(\sin - \cos)((\alpha, \beta)) = (0, \sqrt{2})$ pro sudá k a Platí $(\sin - \cos)((\alpha, \beta)) = (-\sqrt{2}, 0)$ pro lichá k.

Funkce $f = \frac{1}{\sqrt[3]{y}}$ má primitivní funkci na intervalech $(a, b) = (0, \infty)$ (ten vezmeme pro sudá k) nebo na $(a, b) = (-\infty, 0)$ (ten pro lichá k). Protože $\sin((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha, \beta)$. Protože takhle můžeme zafixovat interval pro každé k, dostáváme celkem $(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{5\pi}{4} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

(Není potřeba najít přesně interval $(0, \sqrt{2})$, důležité je jen ověřit vztah $\sin((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$.)

(f) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\, \mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme substituci $y = \sqrt{x}$. Potom $y^2 = x$, $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx$ a platí

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\, dx = 2\int \frac{1}{\sqrt{1-x}} \frac{dx}{2\sqrt{x}} = 2\int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\, dy \stackrel{C}{=} 2\arcsin y = 2\arcsin\sqrt{x}$$

Primitivní funkci budeme hledat na intervalu $(0, 1)$, protože tam je definována funkce $\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$.

Položme $\varphi = \sqrt{x}$ a $(\alpha, \beta) = (0, 1)$. Pak $\sqrt{((0, 1))} = (0, 1)$.

Funkce $f = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ má primitivní funkci na intervalu $(-1, 1)$. Protože $\sqrt{((\alpha, \beta))} \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (0, 1)$.

(g) $\displaystyle\int x^2 e^{-2x}\, \mathrm{d}x$

Řešení:

První per partes: $u' = e^{-2x}$, $u = -\frac{1}{2}e^{-2x}$, $v = x^2$, $v' = 2x$.

$$\int x^2 e^{-2x}\, dx = \left[-\frac{1}{2}x^2 e^{-2x}\right] + \int x e^{-2x}\, dx =$$

Druhé per partes: $u' = e^{-2x}$, $u = -\frac{1}{2}e^{-2x}$, $v = x$, $v' = 1$.

$$= -\frac{1}{2}x^2 e^{-2x} + \left[-\frac{1}{2}x e^{-2x}\right] + \frac{1}{2}\int e^{-2x}\, dx \stackrel{C}{=} -\frac{1}{2}x^2 e^{-2x} - \frac{1}{2}x e^{-2x} - \frac{1}{4}\int e^{-2x}$$

(h) $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sin x}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme substituci $y = \sin x$. Pak platí

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin x}\,dx = \int \frac{\cos^2 x\,\cos x}{\sin x}\,dx = \int \frac{(1-\sin^2 x)}{\sin x}\cos x\,dx =$$

$$= \int \frac{1-y^2}{y}\,dy = \int \frac{1}{y}\,dy - \int y\,dy \overset{C}{=} \ln|y| - \frac{y^2}{2} = \ln|\sin x| - \frac{\sin^2 x}{2}$$

Funkce $\frac{\cos^3}{\sin x} = \frac{(1-\sin^2 x)\cos x}{\sin x}$ je definována na $(0+k\pi, \pi+k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Na těchto intervalech tedy má smysl hledat primitivní funkci. Jeden z nich zafixujeme. Pro substituci máme $\varphi = \sin x$, interval $(\alpha, \beta) = (0 + k\pi, \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Platí $\sin((\alpha, \beta)) = (0, 1]$ (nebo $[-1, 0)$).

Funkce $f = \frac{1-y^2}{y}$ má primitivní funkci na intervalu $(a, b) = (0, \infty)$ (nebo $-\infty, 0)$). Protože $\sin((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha, \beta)$. Protože takhle můžeme zafixovat interval pro každé k, dostáváme celkem $x \in (0+k\pi, \pi+k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

(i) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme substituci $y = \sqrt{x^2+1}$. Potom $dy = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ a $y^2-1 = x^2$ a platí

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int \frac{1}{x^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int \frac{1}{y^2-1}\,dy = -\int \frac{1}{1-y^2}\,dy \overset{C}{=} -\frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y} =$$

$$-\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{1-\sqrt{x^2+1}}$$

Primitivní funkci budeme hledat na intervalech $(0, \infty)$ a $(-\infty, 0)$, protože tam je definována funkce $\frac{1}{x\sqrt{(1+x^2)}}$.

Položme $\varphi = \sqrt{x^2+1}$ a $(\alpha, \beta) = (0, \infty)$ (nebo $(-\infty, 0)$). Pak $\varphi((\alpha, \beta)) = (1, \infty)$ (v obou případech).

Funkce $f = \frac{1}{1-y^2}$ má primitivní funkci speciálně na intervalu $(1, \infty)$. Protože $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (0, \infty)$ i pro $x \in (-\infty, 0)$.

(j) $\displaystyle\int x\arctan x\,\mathrm{d}x$

Řešení: Per partes: $u' = x$, $u = \frac{x^2}{2}$, $v = \arctan x$, $v' = \frac{1}{1+x^2}$.

$$\int x\arctan x\,dx = \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx \overset{C}{=} \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan x$$

(k) $\displaystyle\int \ln(x + \sqrt{1+x^2})\,\mathrm{d}x$

Řešení: Per partes: $u' = 1$, $u = x$, $v = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$, $v' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

$$\int 1 \cdot \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\, dx = \left[x \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right] - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx \stackrel{C}{=}$$

$$x \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \sqrt{1+x^2}$$

Poslední integrál lze počítat např. substitucí $y = 1 + x^2$.

(l) $\displaystyle\int \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme integraci per partes, položme $v' = 1$, $u = \sin(\ln x)$. Potom $v = x$ a $u' = \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x}$. Dostaneme, že

$$\int 1 \cdot \sin(\ln x) = x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\, dx =$$

Nyní použijeme ještě jednou per partes na $v' = 1$ a $u = \cos(\ln x)$ a dostaneme

$$\int 1 \cdot \sin(\ln x) = x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\, dx = x \sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)$$

Převedením integrálu napravo na levou stranu dostaneme, že

$$2 \int 1 \cdot \sin(\ln x) \stackrel{C}{=} x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x)$$

$$\int \sin(\ln x) \stackrel{C}{=} \frac{1}{2} x(\sin(\ln x) - \cos(\ln x))$$

(m) $\displaystyle\int x^n \ln x\,\mathrm{d}x$, $n \neq -1$

Řešení:

Položme $u' = x^n$, $v = \ln x$. Potom $u = x^{n+1}/n+1$ a $v' = \frac{1}{x}$. Integrace per partes dává

$$\int x^n \ln x\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \int \frac{x^n}{n+1}\, dx \stackrel{C}{=} \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$$

(n) $\displaystyle\int e^{ax} \sin bx\,\mathrm{d}x$

Řešení:

Pro $b = 0$ je $\int e^{ax} \sin(0x)\ \mathrm{d}x = \int 0\ \mathrm{d}x \stackrel{C}{=} 1$.

Nyní předpokládejme, že $a \neq 0$, $b \neq 0$. Použijeme nadvakrát integraci per partes, exponencielu budeme derivovat a goniometrickou funkci integrovat. Platí

$$\int e^{ax} \sin bx\ \mathrm{d}x = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx\ \mathrm{d}x =$$

$$-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\sin bx - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\sin bx \, \mathrm{d}x.$$

Odtud vyplývá, že

$$\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\int e^{ax}\sin bx \, \mathrm{d}x \overset{C}{=} -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\sin bx$$

$$\int e^{ax}\sin bx \, \mathrm{d}x \overset{C}{=} -\frac{b}{a^2+b^2}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{a^2+b^2}e^{ax}\sin bx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(a\sin bx - b\cos bx\right)$$

Lehko se ověří, že výsledek platí i pro $a = 0$, pokud $b \neq 0$.

2. (a) $f(x) = |x|$

   (b) $f(x) = \max\{1, x^2\}$

   Řešení:

   http://is.muni.cz/do/sci/UMS/el/analyza/pages/zakladni-integracni-metody.html
   346

Řešení. $\int \cos^2 \frac{x}{2}\,dx = \int \frac{1+\cos x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int 1\,dx + \frac{1}{2}\int \cos x\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin x}{2} + \mathbf{C}$ na $\mathbb{R}$. ■

§2. **Lepení primitivních funkcí.** Pokud umíme nalézt primitivní funkci k dané funkci na některých intervalech (a,b), ale neumíme to přímo pro maximální intervaly, na kterých existuje, pak užíváme často *„metodu lepení“* primitivních funkcí.

2a <u>P ř í k l a d</u> Spočtěte $\int |x|\,dx$.

Řešení. Snadno nahlédneme, že $\int |x|\,dx = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + \mathbf{C}$ na intervalu $(0,\infty)$ a že $\int |x|\,dx = \int (-x)\,dx = -\frac{x^2}{2} + \mathbf{C}$ na intervalu $(-\infty,0)$. Tedy pro všechna $c \in \mathbb{R}$ je $\frac{x^2}{2} + c$ primitivní funkcí k $|x|$ na intervalu $(0,\infty)$ a pro všechna $d \in \mathbb{R}$ je $-\frac{x^2}{2} + d$ primitivní funkcí k $|x|$ na intervalu $(-\infty,0)$.

Protože funkce $|x|$ je spojitá na $\mathbb{R}$, existuje primitivní funkce k $|x|$ na $\mathbb{R}$.

Je-li F nějaká primitivní funkce k funkci $|x|$ na celém $\mathbb{R}$, pak $F(x) = \frac{x^2}{2} + c$ na intervalu $(0,\infty)$ pro nějaké $c \in \mathbb{R}$ a $F(x) = -\frac{x^2}{2} + d$ na intervalu $(-\infty,0)$ pro nějaké $d \in \mathbb{R}$. Navíc, protože F má v každém bodě x intervalu $(-\infty,\infty)$ vlastní derivaci $|x|$, musí být F spojitá na $\mathbb{R}$. K tomu je nutnou a postačující podmínkou to, že platí

$$\lim_{x\to 0_-} F(x) = \lim_{x\to 0_+} F(x),$$

a tedy $c = d$. Funkce F je proto rovna funkci $(\operatorname{sgn} x)\frac{x^2}{2} + c$ na celém $\mathbb{R}$ pro nějaké $c \in \mathbb{R}$ a vzhledem k tomu, že všechny primitivní funkce na intervalu jsou určeny jednoznačně až na přičtení konstantní funkce, jsou funkce tvaru $(\operatorname{sgn} x)\frac{x^2}{2} + c$ všemi primitivními funkcemi k $|x|$ na maximálním intervalu $(-\infty,\infty)$, tj.

$$\int |x|\,dx = (\operatorname{sgn} x)\frac{x^2}{2} + \mathbf{C} \text{ na } (-\infty,\infty).$$

■

<u>P ř í k l a d</u> Spočtěte $\int |\sin x + \cos x|\,dx$.

Řešení. Protože $\sin x + \cos x = \sin x + \sin(x + \frac{\pi}{2}) = 2\sin(x + \frac{\pi}{4})\cos\frac{\pi}{4}$, platí $|\sin x + \cos x| = (-1)^k(\sin x + \cos x)$, pokud $x \in I_k = (-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi)$, kde k je libovolné celé číslo. Snadno nyní zjistíme, že funkce

$$F_k(x) = (-1)^k(-\cos x + \sin x) + c_k$$

je primitivní k funkci $|\sin x + \cos x|$ na intervalu I_k pro každé celé k a libovolné reálné c_k.

2b

(346) Vypočtěte

$$\int \max\{1, x^2\}\, dx.$$

Řešení:

Pro $|x| \leq 1$ platí

$$\int \max\{1, x^2\}\, dx = \int 1\, dx = x + C.$$

Je-li $|x| > 1$, platí

$$\int \max\{1, x^2\}\, dx = \int x^2\, dx = \frac{x^3}{3} + C.$$

Protože výsledná funkce musí být spojitá, platí

$$\int \max\{1, x^2\}\, dx = \begin{cases} \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3} + C & \text{pro } x < -1, \\ x + C & \text{pro } |x| \leq 1, \\ \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3} + C & \text{pro } x > 1. \end{cases}$$

2c

(c) $f(x) = \sqrt{x^6}$

Řešení:

Platí, že $\sqrt{x^6} = |x^3|$. Na intervalu $x \in (0, +\infty)$ platí, že

$$\int \sqrt{x^6}\, dx = \int x^3\, dx = \frac{x^4}{4} + C_1$$

Na intervalu $x \in (-\infty, 0)$ platí, že

$$\int \sqrt{x^6}\, dx = \int (-x^3)\, dx = -\frac{x^4}{4} + C_2$$

Primitivní funkce ovšem existuje na celém $\mathbb{R}$, pokud se obě funkce shodují v bodě 0, tedy pokud $C_1 = C_2$ (princip lepení). Primitivní funkce jsou tedy určeny vztahy

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{x^4}{4} + C & x < 0 \\ C & x = 0 \\ \frac{x^4}{4} + C & x > 0 \end{cases}$$

kde C značí všude stejnou konstantu, avšak libovolně volenou.

(d) $f(x) = e^{-|x|}$

2d)

$\int e^{-|x|}\,dx$

$x \in (0, \infty)$

$\int e^{-x}dx = -e^{-x} + c_1$

$x \in (-\infty, 0)$

$\int e^{x}\,dx = e^{x} + c_2$

$\lim\limits_{x \to 0-} e^{x} + c_2 = 1 + c_2$

$\lim\limits_{x \to 0+} -e^{-x} + c_1 = \cancel{-\frac{1}{e} + c_1} = -1 + c_1$

chceme $1 + c_2 = -1 + c_1$

$\cancel{c_2 = -\frac{1}{e} - 1 + c_1}$ $c_2 = c_1 - 2$

pak

$$F(x) = \begin{cases} e^{x} - 2 + c_1 & x \in (-\infty, 0) \\ -1 + c_1 & \\ -e^{-x} + c_1 & x \in (0, \infty) \end{cases}$$

(e) $f(x) = |\sin x|$

Řešení:

Protože f je spojitá na $\mathbb{R}$, má také na $\mathbb{R}$ primitivní funkci.

Nejprve určíme neurčitý integrál k f na intervalech $(0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$ a $(\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$, kde k je libovolné celé číslo. Protože

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & x \in (0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi) \\ -\sin x & x \in (\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi) \end{cases}$$

platí, že libovolná primitivní funkce k funkci f na $\mathbb{R}$ má tvar

$$F(x) = \begin{cases} -\cos x + A_k & x \in (0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi) \\ \cos x + B_k & x \in (\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi) \end{cases}$$

kde A_k, B_k jsou konstanty. V bodech $2k\pi$ je potřeba zajistit, aby funkce F byla spojitá, a tudíž limita zleva byla rovna limitě zprava. Z toho vyplývá, že

$$-\cos x + A_k = \cos x + B_{k-1} \qquad \text{pro } x = 2k\pi \implies -1 + A_k = 1 + B_{k-1}$$

$$\implies A_k = 2 + B_{k-1}$$

$$-\cos x + A_k = \cos x + B_k \qquad \text{pro } x = \pi + 2k\pi \implies 1 + A_k = -1 + B_k$$

$$\implies B_k = A_k + 2 = 4 + B_{k-1}$$

Z toho vyplývá, že funkce F je jednoznačně určena volbou kterékoliv konstanty A_k nebo B_k pro jedno libovolně volené celé číslo k.

28

(f) $f(x) = \sqrt{1 - \sin 2x}$

Řešení:

Zadaná funkce je definovaná a spojitá na celém $\mathbb{R}$, tedy primitivní funkci budeme hledat také na $\mathbb{R}$.

$$\int \sqrt{1 - \sin 2x}\, \mathrm{d}x = \int \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x - 2 \sin x \cos x}\, \mathrm{d}x$$
$$= \int \sqrt{(\cos x - \sin x)^2}\, \mathrm{d}x = \int |\cos x - \sin x|\, \mathrm{d}x$$

Nyní hledejme primitivní funkci zvlášť na intervalu $(-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi)$, kde

$$\int |\cos x - \sin x|\, \mathrm{d}x = \int (\cos x - \sin x)\, \mathrm{d}x = \sin x + \cos x + A_k$$

a na intervalu $(\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi)$, kde

$$\int |\cos x - \sin x|\, \mathrm{d}x = \int (\sin x - \cos x)\, \mathrm{d}x = -\cos x - \sin x + B_k.$$

Abychom dostali primitivní funkci na celém intervalu $(0, \pi)$, musíme zajistit, aby v bodě $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ byla spojitá, tedy aby platilo

$$\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} + A_k = -\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4} + B_k$$
$$\sqrt{2} + A_k = -\sqrt{2} + B_k$$
$$B_k = 2\sqrt{2} + A_k.$$

Volbou jedné z konstant A_k nebo B_k je tedy primitivní funkce jednoznačně určena. Naopak, jednu z těchto konstant můžeme volit zcela libovolně.

Je možné ověřit, že nalezená funkce je v bodě $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ je diferencovatelná (výpočtem derivace zleva a zprava pomocí limity) a derivace má správnou hodnotu. Není to ale nutné, protože máme Větu.

Řešení. $\int \cos^2 \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+\cos x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int 1\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \cos x\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{\sin x}{2} + \mathbf{C}$ na $\mathbb{R}$. ∎

§2. Lepení primitivních funkcí. Pokud umíme nalézt primitivní funkci k dané funkci na některých intervalech (a,b), ale neumíme to přímo pro maximální intervaly, na kterých existuje, pak užíváme často „*metodu lepení*“ primitivních funkcí.

<u>Příklad</u> Spočtěte $\int |x|\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Snadno nahlédneme, že $\int |x|\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + \mathbf{C}$ na intervalu $(0,\infty)$ a že $\int |x|\,\mathrm{d}x = \int(-x)\,\mathrm{d}x = -\frac{x^2}{2} + \mathbf{C}$ na intervalu $(-\infty,0)$. Tedy pro všechna $c \in \mathbb{R}$ je $\frac{x^2}{2} + c$ primitivní funkcí k $|x|$ na intervalu $(0,\infty)$ a pro všechna $d \in \mathbb{R}$ je $-\frac{x^2}{2} + d$ primitivní funkcí k $|x|$ na intervalu $(-\infty,0)$.

Protože funkce $|x|$ je spojitá na $\mathbb{R}$, existuje primitivní funkce k $|x|$ na $\mathbb{R}$.

Je-li F nějaká primitivní funkce k funkci $|x|$ na celém $\mathbb{R}$, pak $F(x) = \frac{x^2}{2} + c$ na intervalu $(0,\infty)$ pro nějaké $c \in \mathbb{R}$ a $F(x) = -\frac{x^2}{2} + d$ na intervalu $(-\infty,0)$ pro nějaké $d \in \mathbb{R}$. Navíc, protože F má v každém bodě x intervalu $(-\infty,\infty)$ vlastní derivaci $|x|$, musí být F spojitá na $\mathbb{R}$. K tomu je nutnou a postačující podmínkou to, že platí

$$\lim_{x\to 0_-} F(x) = \lim_{x\to 0_+} F(x),$$

a tedy $c = d$. Funkce F je proto rovna funkci $(\operatorname{sgn} x)\frac{x^2}{2} + c$ na celém $\mathbb{R}$ pro nějaké $c \in \mathbb{R}$ a vzhledem k tomu, že všechny primitivní funkce na intervalu jsou určeny jednoznačně až na přičtení konstantní funkce, jsou funkce tvaru $(\operatorname{sgn} x)\,\frac{x^2}{2} + c$ všemi primitivními funkcemi k $|x|$ na maximálním intervalu $(-\infty,\infty)$, tj.

$$\int |x|\,\mathrm{d}x = (\operatorname{sgn} x)\frac{x^2}{2} + \mathbf{C} \text{ na } (-\infty,\infty).$$

∎

28 <u>Příklad</u> Spočtěte $\int |\sin x + \cos x|\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Protože $\sin x + \cos x = \sin x + \sin(x + \frac{\pi}{2}) = 2\sin(x+\frac{\pi}{4})\cos\frac{\pi}{4}$, platí $|\sin x + \cos x| = (-1)^k(\sin x + \cos x)$, pokud $x \in I_k = (-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi)$, kde k je libovolné celé číslo. Snadno nyní zjistíme, že funkce

$$F_k(x) = (-1)^k(-\cos x + \sin x) + c_k$$

je primitivní k funkci $|\sin x + \cos x|$ na intervalu I_k pro každé celé k a libovolné reálné c_k.

Uvažujme funkci F definovanou přepisem $F(x) = F_k(x)$ na každém I_k. Aby funkce F byla spojitá, musí platit

$$\lim_{x\to(\frac{3\pi}{4}+k\pi)_-} (-1)^k(-\cos x + \sin x) + c_k = \sqrt{2} + c_k =$$
$$= \lim_{x\to(-\frac{\pi}{4}+(k+1)\pi)_+} (-1)^{k+1}(-\cos x + \sin x) + c_{k+1} = -\sqrt{2} + c_{k+1}$$

pro všechna $k \in \mathbb{Z}$.

Zvolíme tedy c_0 libovolné a $c_k = c_0 + 2k\sqrt{2}$ pro všechna $k \in \mathbb{Z}$. Tím je určena spojitá funkce F na $\mathbb{R}$. Protože derivace funkce F konverguje k hodnotě (spojité) funkce $|\sin x + \cos x|$ pro x blížící se hodnotě $-\frac{\pi}{4} + k\pi$ zleva i zprava pro všechna celá k, jsou podle věty o limitě derivací a jednostranných derivacích limita zleva i zprava funkce F' rovny derivaci F v bodě $-\frac{\pi}{4} + k\pi$ a ta je rovna hodnotě funkce $|\sin x + \cos x|$ v bodě $-\frac{\pi}{4} + k\pi$ pro všechna celá k. Proto je F primitivní funkcí k $|\sin x+\cos x|$ na celém $\mathbb{R}$. Přičtením libovolné konstanty můžeme docílit, že hodnota c_0 je libovolné reálné číslo.

Řešením tedy je, že

$$\int |\sin x + \cos x| \,\mathrm{d}x = F_0(x) + \mathbf{C},$$

kde $F_0(x) = (-1)^k(-\cos x + \sin x) + k2\sqrt{2}$ pro $x \in [-\frac{\pi}{4} + k\pi, -\frac{\pi}{4} + (k+1)\pi]$ pro všechna k celá. ■

Všimněte si, že v prvním z předchozích dvou příkladů jsme použili explicitně tvrzení o existenci primitivní funkce ke spojité funkci [I1, Věta 49], kdežto ve druhém jsme se bez toho obešli. Použili jsme ovšem jiné tvrzení (o limitě derivace a jednostranné derivaci [DII, Věta 80]). V obou případech si můžete rozmyslet, jak by vypadalo užití druhého z obou možných postupů.

§3. Derivace součinu a metoda per partes. Není příliš časté, aby funkce byla zapsána ve tvaru derivace součinu dvou funkcí jako v následujícím příkladu.

P ř í k l a d   Spočtěte $\int e^x(\sin x + \cos x)\,\mathrm{d}x$.

Řešení. $\int e^x(\sin x + \cos x)\,\mathrm{d}x = \int \Big((e^x)'\sin x + e^x(\sin x)'\Big)\,\mathrm{d}x = e^x \sin x + \mathbf{C}$ na $\mathbb{R}$. ■

Mnohem častěji je možné vyjádřit si zadanou funkci jako součin derivace jedné funkce s funkcí druhou, tedy jen jako část vzorce pro derivaci součinu. To nám umožní použít *metodu per partes*, která spočívá v následujícím pozorování.

Je-li $G'(x) = g(x)$ a $F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in (a, b)$, pak platí, že

$$\int F(x)g(x)\,\mathrm{d}x = F(x)G(x) - \int f(x)G(x)\,\mathrm{d}x$$