11. cvičení - Per partes, Substituce + Lepení

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1. Nechť f je spojitá funkce na otevřeném intervalu I. Potom f má na I primitivní funkci.

Věta 2. Nechť f, F jsou spojité funkce na otevřeném intervalu I. Nechť $c \in I$ a nechť navíc $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in I \setminus \{c\}$. Pak $F' = f$ na I.

Věta 3 (první věta o substituci)**.** Nechť $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $\alpha < \beta$. Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b). Nechť φ je funkce definovaná na intervalu (α, β) s hodnotami v (a, b), která má v každém bodě (α, β) vlastní derivaci. Pak

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{C}{=} F(\varphi(x)), \quad x \in (\alpha, \beta).$$

Věta 4 (Integrace per partes)**.** Nechť I je neprázdný otevřený interval a funkce f je spojitá na I. Nechť F je primitivní funkce k f na I a G je primitivní funkce ke g na I. Pak platí

$$\int g(x)F(x)\,\mathrm{d}x = G(x)F(x) - \int G(x)f(x)\,\mathrm{d}x \text{ na } I.$$

Poznámka 5. Objevuje se i v podobě:

$$\int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x \text{ na } I.$$

Algoritmus pro lepení

1. Zintegrujeme funkci zvlášť na každém intervalu, kde to umíme. (Intervaly nám dá předpis funkce, odmocnina, absolutní hodnota, max/min, Věta o substituci...)
2. Zkontrolujeme, na jakém otevřeném intervalu je funkce f spojitá - tam budeme hledat PF. Najdeme body, kde se funkce musí slepit.
3. Spočteme limity zleva a zprava a upravíme jednotlivé konstanty tak, aby výsledek byl spojitý.
4. Aplikujeme větu 2 - ta říká, že jsme to slepili správně.

Příklady

Určete primitivní funkci k funkci $f(x)$ na otevřené podmnožině jejího definičního oboru, kde primitivní funkce existuje.

1. (a) $\displaystyle\int \arctan x \,\mathrm{d}x$
   (b) ♡ $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x} \,\mathrm{d}x$
   (c) ♡ $\displaystyle\int \operatorname{cotg} x \,\mathrm{d}x$
   (d) $\displaystyle\int x \ln \frac{1+x}{1-x} \,\mathrm{d}x$
   (e) $\displaystyle\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} \,\mathrm{d}x$
   (f) ♡ $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \,\mathrm{d}x$
   (g) $\displaystyle\int x^2 e^{-2x} \,\mathrm{d}x$
   (h) $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sin x} \,\mathrm{d}x$
   (i) ♡ $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} \,\mathrm{d}x$
   (j) $\displaystyle\int x \arctan x \,\mathrm{d}x$
   (k) $\displaystyle\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \,\mathrm{d}x$
   (l) $\displaystyle\int \sin(\ln x) \,\mathrm{d}x$
   (m) $\displaystyle\int x^n \ln x \,\mathrm{d}x$, $n \neq -1$
   (n) $\displaystyle\int e^{ax} \sin bx \,\mathrm{d}x$

2. (a) $f(x) = |x|$
   (b) $f(x) = \max\{1, x^2\}$
   (c) $f(x) = \sqrt{x^6}$
   (d) $f(x) = e^{-|x|}$
   (e) $f(x) = |\sin x|$
   (f) $f(x) = \sqrt{1 - \sin 2x}$
   (g) $f(x) = |\sin x + \cos x|$

(1b) $\frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}$ (1c) $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$
(1f) $y = \sqrt{x}$
(1h) $\cos^3 x = \cos x \cdot \cos^2 x = \cos x(1 - \sin^2 x)$
(1i) $\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{x^2\sqrt{1+x^2}}$