10. cvičení - Per partes + Substituce

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (první věta o substituci)**.** Nechť $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $\alpha < \beta$. Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b). Nechť φ je funkce definovaná na intervalu (α, β) s hodnotami v (a, b), která má v každém bodě (α, β) vlastní derivaci. Pak

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{C}{=} F(\varphi(x)), \quad x \in (\alpha, \beta).$$

Věta 2 (Integrace per partes)**.** Nechť I je neprázdný otevřený interval a funkce f je spojitá na I. Nechť F je primitivní funkce k f na I a G je primitivní funkce ke g na I. Pak platí

$$\int g(x)F(x)\,\mathrm{d}x = G(x)F(x) - \int G(x)f(x)\,\mathrm{d}x \text{ na } I.$$

Poznámka 3. Objevuje se i v podobě:

$$\int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x \text{ na } I.$$

Poznámka 4. Nechť $P(x)$ značí polynom. V následujících tabulkách je pak nápověda, jak zvolit v per partes. (Jako každá nápověda, funguje to často, ale ne nutně vždycky.)

	v(x)	u'(x)
$P(x) \cdot e^{kx}$	$P(x)$	e^{kx}
$P(x) \cdot a^{kx}$	$P(x)$	a^{kx}
$P(x) \cdot \sin(kx)$	$P(x)$	$\sin(kx)$
$P(x) \cdot \cos(kx)$	$P(x)$	$\cos(kx)$

	v(x)	u'(x)
$P(x) \cdot \ln^n x$	$\ln^n x$	$P(x)$
$P(x) \cdot \arcsin(kx)$	$\arcsin(kx)$	$P(x)$
$P(x) \cdot \arccos(kx)$	$\arccos(kx)$	$P(x)$
$P(x) \cdot \arctan(kx)$	$\arctan(kx)$	$P(x)$
$P(x) \cdot \mathrm{arccot}(kx)$	$\mathrm{arccot}(kx)$	$P(x)$

Hinty

$$x^3 = x \cdot x^2$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x}{\sin^2 x} = \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x}$$

$$\cos^3 x = \cos x \cdot \cos^2 x = \cos x(1 - \sin^2 x)$$

$$x^4 = (x^2)^2$$

Příklady

Určete primitivní funkci k funkci $f(x)$ na otevřené podmnožině jejího definičního oboru, kde primitivní funkce existuje.

1. Substituce

   (a) $\int \sin^5 x \cos x \, \mathrm{d}x.$

   (b) $\int -2xe^{-x^2} \, \mathrm{d}x$

   (c) $\int \frac{x}{(1+x^2)^2} \, \mathrm{d}x$

   (d) $\int \frac{1}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x$

2. Per partes

   (a) $\int x \cos x \, \mathrm{d}x$

   (b) $\int xe^{-x} \, \mathrm{d}x$

   (c) $\int e^x \sin x \, \mathrm{d}x$

3. Směs

   (a) $\int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x$

   (b) $\int \ln x \, \mathrm{d}x$

   (c) $\int \frac{e^x}{2+e^x} \, \mathrm{d}x$

   (d) $\int \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)} \, \mathrm{d}x$

   (e) $\int \arcsin x \, \mathrm{d}x$

   (f) $\int \frac{x}{3-2x^2} \, \mathrm{d}x$

   (g) $\int x^2 \sin 2x \, \mathrm{d}x$

   (h) $\int e^{ax} \cos bx \, \mathrm{d}x$

   (i) $\int \frac{1}{\sin^2 x \sqrt[4]{\operatorname{cotg} x}} \, \mathrm{d}x$

   (j) $\int \cos(\ln x) \, \mathrm{d}x$

   (k) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x$

   (l) $\int \sin x \ln(\operatorname{tg} x) \, \mathrm{d}x$

   (m) $\int \frac{\arctan x}{1+x^2} \, \mathrm{d}x$

   (n) $\int x^2 \arccos x \, \mathrm{d}x$

   (o) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}} \, \mathrm{d}x$

   (p) $\int \sqrt{x} \ln^2 x \, \mathrm{d}x$

   (q) $\int \frac{\ln^2 x}{x} \, \mathrm{d}x$

   (r) $\int x^3 e^{-x^2} \, \mathrm{d}x$

   (s) $\int \operatorname{tg} x \, \mathrm{d}x$

   (t) $\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$

   (u) $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} \, \mathrm{d}x$

   (v) $\int \frac{1}{\sin x} \, \mathrm{d}x$

   (w) $\int \cos^3 x \, \mathrm{d}x$

   (x) $\int \frac{x}{4+x^4} \, \mathrm{d}x$

   (y) $\int \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}} \, \mathrm{d}x$

   (z) $\int \frac{\arcsin x}{x^2} \, \mathrm{d}x$