

9. cvičení

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/>,

Teorie

Definice 1. Necht' funkce f je definována na neprázdném otevřeném intervalu I . Řekneme, že funkce F je *primitivní funkce k f na I* , jestliže pro každé $x \in I$ existuje $F'(x)$ a platí $F'(x) = f(x)$.

Věta 2 (Rovnost až na konstantu). Necht' F a G jsou primitivní funkce k funkci f na otevřeném intervalu I . Pak existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $F(x) = G(x) + c$ pro každé $x \in I$.

Věta 3 (Linearita neurčitého integrálu). Necht' f má na otevřeném intervalu I primitivní funkci F , funkce g má na I primitivní funkci G a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Potom funkce $\alpha F + \beta G$ je primitivní funkcí k $\alpha f + \beta g$ na I .

Poznámka 4. 1. Značení $\int f$ tady znamená množinu primitivních funkcí, $F = \int f$ znamená, že F je primitivní k f .

2. $\int \alpha f = \alpha \int f$ pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

3. Mají-li f, g primitivní funkce, pak $\int (f + g) = \int f + \int g$.

Hinty

$$\begin{array}{lll} x^{-a} = \frac{1}{x^a} & & \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \\ x^{a/b} = \sqrt[b]{x^a} & & a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \\ a^b = e^{b \ln a} & & \end{array}$$

Příklady

1. Najděte primitivní funkce F k následujícím funkcím f na maximální možné podmnožině reálných čísel a tuto množinu určete.

(a) $f(x) = x^{13}$

Řešení:

$$\int x^{13} dx = \frac{x^{14}}{14} + c$$

$x \in \mathbb{R}$

(b) $f(x) = \sqrt{x}$

Řešení:

$$\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + c = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + c$$

$x > 0$

(c) $f(x) = \frac{1}{x^3}$

Řešení:

$$\int \frac{1}{x^3} dx = \int x^{-3} dx = \frac{x^{-2}}{-2} + c = \frac{-1}{2x^2} + c$$

$x \neq 0$

(d) $f(x) = \frac{1}{x}$

Řešení:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$$

$x \neq 0$

(e) $f(x) = (1 + \sin x + \cos x)$

Řešení: Sledujte výpočet

$$\int (1 + \sin x + \cos x) dx = x - \cos x + \sin x + C.$$

$x \in \mathbb{R}$

(f) $f(x) = 7\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{2} \sin x - \frac{2}{1+x^2}$

Řešení:

$$\int 7\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{2} \sin x - \frac{2}{1+x^2} dx = \frac{7x^{5/3}}{5/3} - \frac{1}{2} \cos x - 2 \arctan x + c$$

$x \in \mathbb{R}$

(g) $f(x) = \frac{2}{\cos^2 x} - e^x$

Řešení:

$$\int \frac{2}{\cos^2 x} - e^x dx = 2 \tan x - e^x + c$$

$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

(h) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{1+x^2} + 1 + x^2$

Řešení:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{1+x^2} + 1 + x^2 = \arcsin x + \arctan x + x + \frac{x^3}{3} + c$$

$x \in (-1, 1)$

(i) $f(x) = \sqrt{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

Řešení:

$$\int \sqrt{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \frac{x^{5/2}}{5/2} - \frac{x^{1/2}}{1/2} + c$$

$x > 0$

$$(j) f(x) = \frac{3x^2 + 4x + 2}{3x}$$

Řešení:

$$\int \frac{3x^2 + 4x + 2}{3x} dx = \int x + \frac{4}{3} + \frac{2}{3x} dx = \frac{x^2}{2} + \frac{4x}{3} + \frac{2}{3} \ln|x| + c$$

$$x \neq 0$$

$$(k) f(x) = (1-x)(1-2x)(1-3x)$$

Řešení: Roznásobením

$$\int (1-x)(1-2x)(1-3x) dx = \int (1-6x+11x^2-6x^3) dx = x-3x^2+\frac{11}{3}x^3-\frac{3}{2}x^4+C.$$

$$x \in \mathbb{R}$$

$$(l) f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$$

Řešení: Sledujte výpočet

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx = \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = \int \left(x^{1/2} + x^{-1/2} \right) dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^{1/2}}{1/2} + C.$$

$$x > 0$$

$$(m) f(x) = \frac{1}{x+A}$$

Řešení: Víme, že primitivní funkce k funkci $\frac{1}{x}$ je $\ln|x| + C$. Tedy primitivní funkce k funkci $\frac{1}{ax+b}$ je $\frac{1}{a} \ln|ax+b| + C$. Odtud vyplývá, že (položte $a=1$, $b=A$)

$$\int \frac{1}{x+A} dx = \ln|x+A| + C.$$

$$x \neq -A$$

2. Dokažte, že pokud $F'(x) = f(x)$, potom $\left(\frac{1}{a}F(ax+b) + C\right)' = f(ax+b)$, pokud $a \neq 0$.

Řešení: Plyne z Věty o aritmetice derivací a derivace složené funkce.

3. Najděte primitivní funkce F k následujícím funkcím f na maximální možné podmnožině reálných čísel a tuto množinu určete.

$$(a) f(x) = \cos(3x)$$

Řešení:

$$\int \cos 3x dx = \frac{1}{3} \sin 3x + c$$

$$x \in \mathbb{R}$$

(b) $f(x) = \sin(2x - \pi)$

Řešení:

$$\int \sin(2x - \pi) dx = -\frac{1}{2} \cos(2x - \pi) + c$$

$x \in \mathbb{R}$

(c) $f(x) = e^{5-3x}$

Řešení:

$$\int e^{5-3x} dx = \frac{-1}{3} e^{5-3x} + c$$

$x \in \mathbb{R}$

(d) $f(x) = \frac{1}{1+4x^2}$

Řešení:

$$\int \frac{1}{1+4x^2} dx = \int \frac{1}{1+(2x)^2} dx = \frac{1}{2} \arctan 2x + c$$

$x \in \mathbb{R}$

(e) $f(x) = \frac{1}{1-4x}$

Řešení:

$$\int \frac{1}{1-4x} = -\frac{1}{4} \ln|1-4x| + c$$

$x \neq \frac{1}{4}$

(f) $f(x) = (2x+1)^7$

Řešení:

$$\int (2x+1)^7 dx = \frac{1}{16} (2x+1)^8 + c$$

$x \in \mathbb{R}$

(g) $f(x) = e^{3x} + \frac{7}{x}$

Řešení:

$$\int e^{3x} + \frac{7}{x} dx = \frac{1}{3} e^{3x} + 7 \ln|x| + c$$

$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(h) $f(x) = (e^{-x} + e^{-2x})$

Řešení: Pomocí lineární substituce $y = -x$, resp. $y = -2x$ dostaneme

$$\int (e^{-x} + e^{-2x}) dx \stackrel{C}{=} -e^{-x} - \frac{1}{2} e^{-2x}$$

$x \in \mathbb{R}$

(i) $f(x) = (3 - x^2)^3$

Řešení: Tento příklad substituuovat nelze, je třeba roznásobit.

$$\int (3 - x^2)^3 dx = \int (27 - 27x^2 + 9x^4 - x^6) dx = 27x - 9x^3 + \frac{9}{5}x^5 - \frac{x^7}{7} + C.$$

$x \in \mathbb{R}$

(j) $f(x) = (\sin 5x - \sin 5\alpha)$

Řešení: Pomocí lineární substituce $y = 5x$ dostaneme

$$\int (\sin 5x - \sin 5\alpha) dx = -\frac{1}{5} \cos 5x - x \sin 5\alpha + c,$$

$x \in \mathbb{R}$,

neboť $\sin 5\alpha$ je konstantní funkce (nezávislá na proměnné x).

(k) $f(x) = \frac{1}{x-2} + (3x+7)^5$

Řešení:

$$\int \frac{1}{x-2} + (3x+7)^5 dx = \ln|x-2| + \frac{1}{18}(3x+7)^6 + c$$

$x \neq 2$

(l) $f(x) = \frac{1}{\sin^2(2x + \frac{\pi}{4})}$

Řešení: Pomocí lineární substituce $y = 2x + \frac{\pi}{4}$ dostaneme

$$\int \frac{1}{\sin^2(2x + \frac{\pi}{4})} dx \stackrel{C}{=} -\frac{1}{2} \cotg\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$2x + \frac{\pi}{4} \neq k\pi$, tedy $x \neq k\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$, $k \in \mathbb{Z}$

(m) $f(x) = \frac{-2}{\sqrt{1-2x^2}}$ **Řešení:**

$$\int \frac{-2}{\sqrt{1-2x^2}} dx = \int \frac{-2}{\sqrt{1-(\sqrt{2}x)^2}} dx = \frac{-2}{\sqrt{2}} \arcsin(\sqrt{2}x) + c$$

$\sqrt{2}x \in (-1, 1)$, tedy $x \in (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

4. Najděte primitivní funkce F k následujícím funkcím f na maximální možné podmnožině reálných čísel a tuto množinu určete.

(a) $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^x + 1} + \frac{4}{1 - \cos^2 x}$

Řešení:

$$\int \frac{e^{2x} - 1}{e^x + 1} + \frac{4}{1 - \cos^2 x} dx = \int \frac{(e^x - 1)(e^x + 1)}{e^x + 1} + \frac{4}{\sin^2 x} dx = \int (e^x - 1) + \frac{4}{\sin^2 x} dx \\ = e^x - x - 4 \cot x + c$$

$$x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

(b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4 - (3x - 1)^2}}$

Řešení:

$$\int \frac{1}{\sqrt{4 - (3x - 1)^2}} dx = \int \frac{1}{2\sqrt{1 - (\frac{3x-1}{2})^2}} dx = \frac{1}{3} \arcsin\left(\frac{3x-1}{2}\right) + c$$

$$x \in (-1/3, 1)$$

(c) $f(x) = (1 - \sqrt{x})^2$

Řešení:

$$\int (1 - \sqrt{x})^2 dx = \int 1 - 2\sqrt{x} + x dx = x - \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + \frac{x^2}{2} + c$$

$$x > 0$$

(d) $f(x) = \tan^2 x$

Řešení: Sledujte výpočet

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \operatorname{tg} x - x + C.$$

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

(e) $f(x) = \frac{x^2}{1 + x^2}$

Řešení: Sledujte výpočet

$$\int \frac{x^2}{1 + x^2} dx = \int \frac{(1 + x^2) - 1}{1 + x^2} dx = \int \left(1 - \frac{1}{1 + x^2} \right) dx = x - \arctan x + C.$$

$$x \in \mathbb{R}$$

(f) $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 - 1}$

Řešení: Sledujte výpočet

$$\int \frac{x^2 + 3}{x^2 - 1} dx = \int \frac{x^2 - 1 + 4}{x^2 - 1} dx = \int \left(1 + \frac{4}{x^2 - 1} \right) dx = \int \left(1 - \frac{4}{1 - x^2} \right) dx \\ = x - 2 \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C.$$

$$x \neq \pm 1$$

(g) $f(x) = (2^x + 3^x)^2$

Řešení: Sledujte výpočet

$$\int (2^x + 3^x)^2 dx = \int (4^x + 2 \cdot 6^x + 9^x) dx = \frac{4^x}{\ln 4} + \frac{2 \cdot 6^x}{\ln 6} + \frac{9^x}{\ln 9} + C.$$

$x \in \mathbb{R}$

(h) $f(x) = \frac{1}{2 + 3x^2}$

Řešení: Výraz převedeme na tvar $\frac{1}{1+c^2x^2}$ a poté užijeme substituci $y = cx$.

$$\int \frac{1}{2 + 3x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1 + \left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2} dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} \arctan \sqrt{\frac{3}{2}}x = \sqrt{\frac{1}{6}} \arctan \sqrt{\frac{3}{2}}x$$

$x \in \mathbb{R}$

(i) $f(x) = \cotg^2 x$

Řešení: Sledujte výpočet

$$\begin{aligned} \int \cotg^2 x dx &= \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx \\ &= -\cotg x - x + C. \end{aligned}$$

$x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

(j) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-5x}}$

Řešení: Protože je

$$\int \frac{1}{\sqrt{y}} dy = 2\sqrt{y},$$

platí

$$\int \frac{1}{\sqrt{2-5x}} dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{-5} \cdot 2\sqrt{2-5x} = -\frac{2}{5}\sqrt{2-5x}$$

$x < 2/5$

(k) $f(x) = \left(\frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^3}{x^3} \right), a \in \mathbb{R}$

Řešení: Sledujte výpočet

$$\int \left(\frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^3}{x^3} \right) dx = a \ln |x| - \frac{a^2}{x} - \frac{a^3}{2x^2} + C.$$

$x \neq 0$

5. Najděte takovou funkci, aby $f'(x) = 6x(1-x)$ a $f(0) = 1$.

Řešení: $\int 6x(1-x) dx = -2x^3 + 3x^2 + c$. Ježto máme $f(0) = 1$, tak $1 = -2 \cdot 0^3 + 3 \cdot 0^2 + c = c$. Hledaná funkce je tedy $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 1, x \in \mathbb{R}$.

6. Najděte chyby

$$(a) \int x^2 e^x dx = \frac{1}{3} x^3 e^x + c$$

Řešení: Integrál součinu není součin integrálů, stejně jako u derivací.

$$(b) \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \arcsin x + c$$

Řešení: x nelze vytknout před integrál, to můžeme jen u konstanty.