7. cvičení - Komplexní řady + Teorie

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

1 Komplexní řady

Teorie

Poznámka 1. 1. Posloupnost **komplexních** čísel $\{x_n = a_n + ib_n\}$ konverguje k číslu $x = a + ib$ právě tehdy, když $a_n \to a$ a zároveň $b_n \to b$.

2. Řada **komplexních** čísel $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + ib_n$ konverguje právě tehdy, když konvergují řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Pokud konvergují, tak navíc platí $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + ib_n = \sum a_n + i \sum_{n=1}^{\infty} b_n$
3. Obvyklé věty platí;) Detaily hledejte: http://matematika.cuni.cz/ikalkulus.html

Fakta

Čísla na kružnici o poloměru $r > 0$ lze vyjádřit jako

$$re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi)$$

Příklady

1. Vyšetřete konvergenci řad.

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + i(-1)^n}{n^2}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(1+i)^n}{3^n}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} a^n,\ a \in \mathbb{C}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n},\ a \in \mathbb{C}$

   Příklady jsme vzali tu, je tam i řešení a další příklady: https://is.muni.cz/th/z86lp/Nekonecne_rady_v_komplexnim_oboru.pdf

2 Reálné řady

2. Které implikace mezi následujícími tvrzeními platí?

   (a) $\sum a_n$ konverguje.
   (b) $\sum (-1)^n a_n$ konverguje.
   (c) $\sum |a_n|$ konverguje.
   (d) $\sum a_n^2$ konverguje.

3. ♡ Které implikace mezi následujícími tvrzeními platí?

   (a) $\lim_{n\to\infty} n \cdot a_n = 0$.
   (b) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 0$.
   (c) $\sum a_n$ konverguje.
   (d) $\sum |a_n|$ konverguje.

4. Dokažte nebo najděte protipříklad

   (a) Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou absolutně konvergentní. Pak i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ je absolutně konvergentní.

   (b) Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konverguje. Nechť navíc $|a_n - b_n| \leq c_n$. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

   (c) Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a b_n je omezená posloupnost. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.

5. ♡ Najděte posloupnost a_n, pro niž $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ a pro každé $\alpha \geq 1$ je

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{\alpha} = \infty.$$

6. Najděte posloupnosti a_n a b_n takové, že $a_n \geq b_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je divergentní.

7. ♡ Najděte posloupnosti a_n a b_n takové, že $|a_n| \geq |b_n|$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je divergentní.

8. ♡ Najděte konvergentní řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a divergentní řadu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tak, že $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

9. Najděte posloupnosti a_n a b_n tak, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ je divergentní, ale přitom a_n a b_n splňují vždy dvě ze tří následujících podmínek:

   (a) $a_n = (-1)^n$,

   (b) $b_{n+1} \leq b_n$,

   (c) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

(3) Jak vypadá $\limsup n|a_n|$?
(5) $1/\ln n$
(7) uvažujte neabsolutně konvergentní řady
(8) $(-1)^n/\sqrt{n}$, $(-1)^n/\sqrt{n} + \frac{1}{n}$